

Matrices élémentaires.

Rappel.

Nous avons vu qu'il y a trois types d'opérations élémentaires (sur les lignes d'une matrice):

- Type I: échanger deux lignes:

$$L_j \leftrightarrow L_k$$

- Type II: multiplier une ligne par un nombre *non-nul*:

$$L_j \rightarrow \lambda L_j, \text{ avec } \lambda \neq 0$$

- Type III: additionner un multiple d'une ligne à une autre:

$$L_k \rightarrow L_k + \lambda L_j, \text{ avec } j \neq k \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}$$

Définition.

Une matrice carrée de taille $n \times n$ est une **matrice élémentaire** si elle peut être obtenue à partir de la matrice identité I_n à l'aide d'une **seule** opération élémentaire sur les lignes.

Par conséquent, il y a trois types de matrice élémentaire.

Illustration ($n=2$)

• Type I: $E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ car $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

• Type II: $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$ car $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow 7L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$

• Type III: $E_3 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ car $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - 3L_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Propriété.

Soit A une matrice de taille $m \times n$ quelconque.

Soit E une matrice élémentaire de taille $m \times m$.

Le produit EA est la matrice obtenue à partir de A à l'aide de l'opération élémentaire sur les lignes associée à la matrice E :

$$\text{Si } I_m \sim E \text{ alors } A \sim EA$$

Vérification.

Prenons $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$, $E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$ et $E_3 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. On a :

• Type I: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} d & e & f \\ a & b & c \end{bmatrix}$
 $E_1 A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & e & f \\ a & b & c \end{bmatrix}$

• Type II: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow 7L_2} E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow 7L_2} \begin{bmatrix} a & b & c \\ 7d & 7e & 7f \end{bmatrix}$
 $E_2 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 7d & 7e & 7f \end{bmatrix}$

• Type III: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - 3L_2} E_3 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
 $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - 3L_2} \begin{bmatrix} a-3d & b-3e & c-3f \\ d & e & f \end{bmatrix}$
 $E_3 A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-3d & b-3e & c-3f \\ d & e & f \end{bmatrix}$

Proposition

Si E est une matrice élémentaire, alors E est inversible.

De plus, E^{-1} est aussi une matrice élémentaire de même type que E .

Preuve.

Il suffit de remarquer que les opérations élémentaires sur les lignes sont réversibles:

Type I: $I \xrightarrow{L_j \leftrightarrow L_k} E \xrightarrow{L_j \leftrightarrow L_k} I$

Type II: $I \xrightarrow{L_j \rightarrow \lambda L_j} E \xrightarrow{L_j \rightarrow \frac{1}{\lambda} L_j} I$

Type III: $I \xrightarrow{L_k \rightarrow L_k + \lambda L_j} E \xrightarrow{L_k \rightarrow L_k - \lambda L_j} I$

Si l'on note F la matrice élémentaire associée à la deuxième opération élémentaire on a bien $FE = I$, d'où $F = E^{-1}$. ■

Théorème.

Soit A une matrice de taille $m \times n$. Soit R la matrice échelonnée-réduite de taille $m \times n$ associée à A .

Alors il existe des matrices élémentaires $E_1, E_2, \dots, E_k$ de taille $m \times m$ telles que

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = R$$

Preuve.

Comme $A \sim R$, il y a un nombre fini d'opérations élémentaires sur les lignes qui transforment A en R . Chacune de ces opérations élémentaires est associée à une matrice élémentaire.

$$\text{On a : } A \sim E_1 A \sim E_2 (E_1 A) = (E_2 E_1) A$$

$$\sim E_3 (E_2 E_1) A = (E_3 E_2 E_1) A \sim \dots$$

$$\sim E_k (E_{k-1} \dots E_3 E_2 E_1) A = (E_k \dots E_3 E_2 E_1) A = R \quad \blacksquare$$

Exemple.

$$\text{Soit } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

On a

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = E_1 A \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = E_1$$

$$\xrightarrow{L_2 \rightarrow \frac{1}{2}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_2 E_1 A \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow \frac{1}{2}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = E_2$$

$$\xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - 1L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_3 E_2 E_1 A \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - 1L_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E_3$$

$$\text{Ainsi, } R = E_3 E_2 E_1 A.$$

Théorème.

Si A est une matrice inversible de taille $n \times n$, alors l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ est consistante pour tout choix de $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$. De plus, le vecteur $\vec{u} = A^{-1}\vec{b}$ est l'unique solution de $A\vec{x} = \vec{b}$.

Preuve.

Comme $A\vec{u} = A(A^{-1}\vec{b}) = (AA^{-1})\vec{b} = I_n\vec{b} = \vec{b}$, le vecteur $\vec{u}$ est une solution de $A\vec{x} = \vec{b}$.

Pour montrer que la solution est unique, supposons que $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ est une solution de $A\vec{x} = \vec{b}$. Autrement dit, on a $A\vec{v} = \vec{b}$.

En multipliant cette égalité par A^{-1} on obtient $A^{-1}(A\vec{v}) = A^{-1}\vec{b}$,

d'où $(A^{-1}A)\vec{v} = A^{-1}\vec{b}$ et $\vec{v} = A^{-1}\vec{b}$. ■

Théorème. Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$.

Alors nous avons l'équivalence suivante:

$$A \text{ est inversible} \Leftrightarrow A \sim I_n$$

De plus, toute suite d'opérations élémentaires sur les lignes qui transforme A en I_n , transforme I_n en A^{-1} .

Preuve.

$\Rightarrow$) Supposons que A est inversible.

Le théorème précédent implique que la forme échelonnée-réduite associée à A possède un pivot par ligne.

Comme A est carrée, les pivots se trouvent sur la diagonale et nous avons donc $R = I_n$.

⇐) Supposons que $A \sim I_n$. Il existe donc des matrices élémentaires $E_1, E_2, \dots, E_k$ telles que $(E_k \dots E_2 E_1)A = I_n$.

Comme $E_1, \dots, E_k$ sont élémentaires, elles sont inversibles et $(E_k \dots E_2 E_1)$ est aussi inversible, d'où :

$$A = (E_k \dots E_2 E_1)^{-1}$$

Par conséquent, A est inversible et nous trouvons :

$$A^{-1} = E_k \dots E_2 E_1.$$

Comme par construction

$$(E_k \dots E_2 E_1) I_n = A^{-1},$$

la suite d'opérations élémentaires sur les lignes qui transforme A en I_n transforme I_n en A^{-1} . ■

Méthode de calcul de A^{-1} .

Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$.

1. Ecrire la matrice augmentée $[A | I_n]$

2. Réduire la matrice augmentée $[A | I_n]$

– Si lors de la réduction de cette matrice il y a une ligne de la forme $0 \dots 0 \mid * \dots *$ alors A n'est pas inversible.

– Sinon, A est inversible et nous avons

$$[A | I_n] \sim [I_n | A^{-1}]$$

Exemples.

Calculer l'inverse des matrices suivantes :

$$1. A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

On a :

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ \xrightarrow[\substack{L_1 \rightarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \rightarrow L_2 - L_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] = [I|A^{-1}]$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vérification :

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+0-1 & 0+0+0 & -1+0+1 \\ 4-1-3 & 0+1+0 & -2-1+3 \\ 2+0-2 & 0+0+0 & -1+0+2 \end{bmatrix} = I$$

$$A^{-1}A = \dots = I$$

$$2. A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

On a:

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{L_2 \rightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - 6L_1}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -6 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\substack{L_1 \rightarrow L_1 + L_2 \\ L_3 \rightarrow L_3 - 4L_2}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\substack{L_1 \rightarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \rightarrow L_2 + L_3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & 1 \end{array} \right] = [I|A^{-1}]$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -3 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Vérification:} \\ AA^{-1} = \dots = I \\ A^{-1}A = \dots = I \end{array} \right.$$

$$3. A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \\ -4 & -9 & 7 \end{bmatrix}$$

On a.

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -9 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -9 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 + 4L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 15 & 0 & 4 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 + 3L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \end{array} \right]$$

$\Rightarrow A$ n'est pas inversible

Caractérisation des matrices inversibles.

Théorème. (Théorème de caractérisation des matrices inversibles)

Soit $A = [\vec{a}_1 \dots \vec{a}_n]$ une matrice carrée de taille $n \times n$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes (autrement dit, elles sont toutes vraies ou toutes fausses) :

- a) A est inversible.
- b) $A \sim I_n$ (A est équivalente selon les lignes à I_n)
- c) A admet n positions pivot.
- d) L'équation $A\vec{x} = \vec{0}$ possède comme unique solution $\vec{x} = \vec{0}$
- e) Les colonnes de A sont linéairement indépendantes.

f) L'application linéaire $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ est injective

g) L'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ admet au moins une solution pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$

h) $\text{Vect}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\} = \mathbb{R}^n$ (les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^n$)

i) L'application linéaire $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ est surjective

j) Il existe une matrice carrée C telle que $CA = I_n$ (inverse à gauche)

k) Il existe une matrice carrée D telle que $AD = I_n$ (inverse à droite)

l) A^T est inversible

Conséquence importante.

Proposition.

Soient A et B deux matrices carrées de taille $n \times n$.

Si $AB = I_n$, alors A et B sont inversibles et $A^{-1} = B$ et $B^{-1} = A$.

Preuve.

Si $AB = I_n$, alors A possède un inverse à droite et le théorème de caractérisation des matrices inversibles implique que A est inversible et $A^{-1} = B$.

Si $AB = I_n$, alors B possède un inverse à gauche et le théorème de caractérisation des matrices inversibles implique que B est inversible et $B^{-1} = A$. ■

Définition.

Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$.

On dit que A est **singulière** si A n'est pas inversible.

Remarque.

Le théorème de caractérisation des matrices inversibles partage l'ensemble de matrices carrées en deux classes disjointes:

- les matrices inversibles (ou non singulières) et
- les matrices singulières (ou non inversibles).