

**Remarque.** Il est toujours possible de multiplier des matrices carrées de même taille.

**Attention :** Même si les produits  $AB$  et  $BA$  sont définis, en général nous avons

$$AB \neq BA.$$

Par exemple, si

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

alors nous avons

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq AB$$

De plus, nous remarquons qu'il est possible d'avoir un produit de deux matrices non nulles qui est égal à la matrice nulle :

$$AB = O \quad \text{avec} \quad A \neq O \quad \text{et} \quad B \neq O.$$

### Puissance d'une matrice :

Les puissances entières non négatives d'une matrice carrée  $A$  sont définies comme suit :

$$A^0 = I, \quad A^1 = A, \quad A^2 = AA, \quad A^k = \underbrace{AA \cdots A}_{k \text{ fois}}$$

**Théorème.** Soit  $A$  une matrice de taille  $m \times n$ , et  $B$  et  $C$  deux matrices telles que les sommes et les produits ci-dessous aient un sens.

- a)**  $A(BC) = (AB)C$  (associativité du produit)
- b)**  $A(B + C) = AB + AC$  (distributivité à gauche)
- c)**  $(B + C)A = BA + CA$  (distributivité à droite)
- d)**  $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$
- e)**  $I_m A = A = A I_n$  (élément neutre pour la multiplication)

*Preuve.*

**a)** Soient  $B$  une matrice de taille  $n \times p$  et  $C$  une matrice de taille  $p \times q$ . Par définition,

$$BC = B \begin{bmatrix} \vec{c}_1 & \vec{c}_2 & \cdots & \vec{c}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B\vec{c}_1 & B\vec{c}_2 & \cdots & B\vec{c}_q \end{bmatrix}$$

d'où

$$\begin{aligned} A(BC) &= A \begin{bmatrix} B\vec{c}_1 & B\vec{c}_2 & \cdots & B\vec{c}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(B\vec{c}_1) & A(B\vec{c}_2) & \cdots & A(B\vec{c}_q) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (AB)\vec{c}_1 & (AB)\vec{c}_2 & \cdots & (AB)\vec{c}_q \end{bmatrix} = (AB) \begin{bmatrix} \vec{c}_1 & \vec{c}_2 & \cdots & \vec{c}_q \end{bmatrix} \\ &= (AB)C \end{aligned}$$

**b) – e)** À faire (voir exercice 9 de la série 5). ■

## Transposée d'une matrice

**Définition.** Soit  $A$  une matrice de taille  $m \times n$ . On définit la *matrice transposée de  $A$* , notée  $A^T$  comme la matrice de taille  $n \times m$  dont les colonnes sont les lignes de  $A$ .

### Exemple

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ alors } A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

**Théorème.** Soient  $A$  et  $B$  deux matrices telles que les sommes et les produits ci-dessous aient un sens.

- a)  $(A^T)^T = A$
- b)  $(A + B)^T = A^T + B^T$
- c)  $(\lambda A)^T = \lambda A^T$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$
- d)  $(AB)^T = B^T A^T$

*Preuve.*

- a) – c) Conséquence directe de la définition.
- d) À faire (voir exercice 9 de la série 5). ■

**Définition.** Soit  $A$  une matrice carrée de taille  $n \times n$ .

On dit que  $A$  est *symétrique* si  $A^T = A$ .

On dit que  $A$  est *antisymétrique* si  $A^T = -A$ .

**Exemple**

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$  est symétrique et  $A = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$  est antisymétrique.

## 2.2. Matrices inversibles

**Définition.** Une matrice carrée  $A = [a_{jk}] \in M_{n,n}(\mathbb{R})$  est *inversible* s'il existe une matrice carrée  $B = [b_{jk}] \in M_{n,n}(\mathbb{R})$  telle que

$$AB = I_n \quad \text{et} \quad BA = I_n$$

où

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

est la matrice identité de  $M_{n,n}(\mathbb{R})$ .

**Remarque.** Si  $A$  est une matrice inversible, alors la matrice  $B$  de la définition est unique. En effet, si  $B$  et  $C$  sont deux matrices telles que  $AB = I_n = BA$  et  $AC = I_n = CA$  alors

$$\left. \begin{array}{l} C(AB) = CI_n = C \\ (CA)B = I_n B = B \end{array} \right\} \implies B = C$$

**Définition.** L'unique matrice de taille  $n \times n$ , notée  $A^{-1}$ , telle que

$$AA^{-1} = I_n \quad \text{et} \quad A^{-1}A = I_n$$

est appelée *matrice inverse de  $A$* .

**Proposition.** Si  $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$  est inversible alors  $A^{-1} \in M_{n,n}(\mathbb{R})$  est aussi inversible et

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

*Preuve.* Par définition,  $AA^{-1} = I_n$  et  $A^{-1}A = I_n$  et de ce fait,  $A$  est l'inverse de  $A^{-1}$ . ■

**Proposition.** Si  $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$  sont deux matrices inversibles, alors

$$AB \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \text{ est inversible} \quad \text{et} \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

*Preuve.* Nous avons

$$AB(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

$$(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$$
 ■

**Proposition.** Si  $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$  est une matrice inversible et  $\lambda \in \mathbb{R}$  est tel que  $\lambda \neq 0$ , alors

$$\lambda A \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \text{ est inversible} \quad \text{et} \quad (\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}.$$

*Preuve.* Nous avons

$$\lambda A \left( \frac{1}{\lambda} A^{-1} \right) = \lambda \frac{1}{\lambda} (AA^{-1}) = I_n$$

$$\left( \frac{1}{\lambda} A^{-1} \right) \lambda A = \lambda \frac{1}{\lambda} (A^{-1}A) = I_n$$
 ■

**Question.** Comment déterminer si  $A$  est inversible?

## Exemple

Déterminer si  $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$  est inversible. Si oui, calculer  $A^{-1}$ .

Nous cherchons une matrice  $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  telle que  $AA^{-1} = I_2$  et  $A^{-1}A = I_2$ .

Nous avons

$$AA^{-1} = I_2 \iff \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} a+4c & b+4d \\ -a-3c & -b-3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nous devons résoudre deux systèmes :

$$\begin{cases} a+4c = 1 \\ -a-3c = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b+4d = 0 \\ -b-3d = 1 \end{cases}$$

La réduction des matrices augmentées associées aux deux systèmes nous donne :

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{array} \right] &\xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 + L_1} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - 4L_2} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right] &\implies \begin{cases} a = -3 \\ c = 1 \end{cases} \\ \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 + L_1} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - 4L_2} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right] &\implies \begin{cases} b = -4 \\ d = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Par conséquent, la matrice  $A$  est inversible et nous avons

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

*Vérification :*

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+4 & -4+4 \\ 3-3 & 4-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+4 & -12+12 \\ 1-1 & 4-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Idée :** Résoudre les deux systèmes en même temps :

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 + L_1} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - 4L_2} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

**Constat :** La réduction de Gauss-Jordan de la matrice  $[A | I_2]$  nous donne dans ce cas la matrice  $[I_2 | A^{-1}]$ .

Nous verrons plus tard que lorsque  $A$  est une matrice inversible de taille  $n \times n$  quelconque, la matrice inverse  $A^{-1}$  peut être calculée exactement de la même manière :

$$[A | I_n] \sim [I_n | A^{-1}]$$

## Cas particulier

Si  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ , alors nous distinguons deux cas :

- Si  $ad - bc \neq 0$ , alors la matrice  $A$  est inversible et nous avons une formule explicite pour calculer l'inverse :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

- Si  $ad - bc = 0$ , alors la matrice  $A$  n'est pas inversible.

Le nombre  $ad - bc$  « détermine » donc si la matrice  $A$  est inversible ou pas ! Ce nombre est appelé le *déterminant* de la matrice  $A$ , noté  $\det(A)$ .

Nous verrons au Chapitre 3 comment définir le déterminant pour des matrices carrées de taille  $n \times n$  avec  $n \geq 3$ .