
2. Calcul matriciel

2.1. Opérations matricielles

Définition. Une *matrice* de taille $m \times n$ est un tableau rectangulaire de mn nombres réels disposés sur m lignes et n colonnes. Les éléments de la matrice sont appelés *coefficients* (ou *éléments*) de la matrice.

Nous utilisons des lettres majuscules pour noter les matrices :

$$A, B, \dots$$

et des lettres minuscules pour les coefficients :

a_{jk} est le coefficient de la matrice A situé à la j -ème ligne et la k -ème colonne.

Une matrice de taille $m \times n$ a la forme générale suivante :

$$A = \underbrace{\left[\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right]}_{n \text{ colonnes}} \left. \vphantom{\left[\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right]} \right\} m \text{ lignes}$$

Notation: L'ensemble des matrices de taille $m \times n$ à coefficients dans \mathbb{R} est noté $M_{m,n}(\mathbb{R})$.

De plus, nous utilisons parfois la notation

$$A = [a_{jk}]$$

plutôt que

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Nous utilisons aussi la notation

$$A = [\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \cdots \quad \vec{a}_n]$$

où

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{a}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix},$$

sont les n colonnes de la matrice A .

Cas particuliers

- *Matrice nulle*, notée $O \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, telle que tous ses coefficients sont nuls :

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

- *Matrice carrée*, si la matrice a le même nombre de lignes et de colonnes : $m = n$.
- *Matrice diagonale* : matrice carrée telle que $a_{jk} = 0$ si $j \neq k$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

- *Matrice identité* ou *matrice unité*, notée $I_n \in M_{n,n}(\mathbb{R})$: matrice diagonale telle que $a_{jj} = 1$ pour tout $j = 1, 2, \dots, n$:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

- *Matrice triangulaire supérieure* : matrice carrée telle que tous les coefficients au-dessous de la diagonale principale sont nuls :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- *Matrice triangulaire inférieure* : matrice carrée telle que tous les coefficients au-dessus de la diagonale principale sont nuls :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Opérations

Somme de matrices :

Soient $A = [a_{jk}]$ et $B = [b_{jk}]$ deux matrices de taille $m \times n$. La somme des matrices A et B , notée $A + B$, est la matrice de taille $m \times n$ donnée par :

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Attention : La somme de matrices n'est pas définie si les matrices n'ont pas la même taille.

Exemple

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+5 & 2-2 \\ 3+4 & 4+0 \\ 5-3 & 6+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 7 & 4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Produit d'une matrice par un scalaire¹ :

Soit $A = [a_{jk}]$ une matrice de taille $m \times n$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Le produit de la matrice A par le scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ est la matrice de taille $m \times n$, notée λA , donnée par

$$\lambda A = \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$

Exemple

$$5 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cdot 1 & 5 \cdot 2 \\ 5 \cdot 3 & 5 \cdot 4 \\ 5 \cdot 5 & 5 \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \\ 25 & 30 \end{bmatrix}$$

1. Pour les physiciens, un scalaire est une quantité physique qui ne comporte qu'une grandeur. Pour les mathématiciens, un scalaire est un nombre.

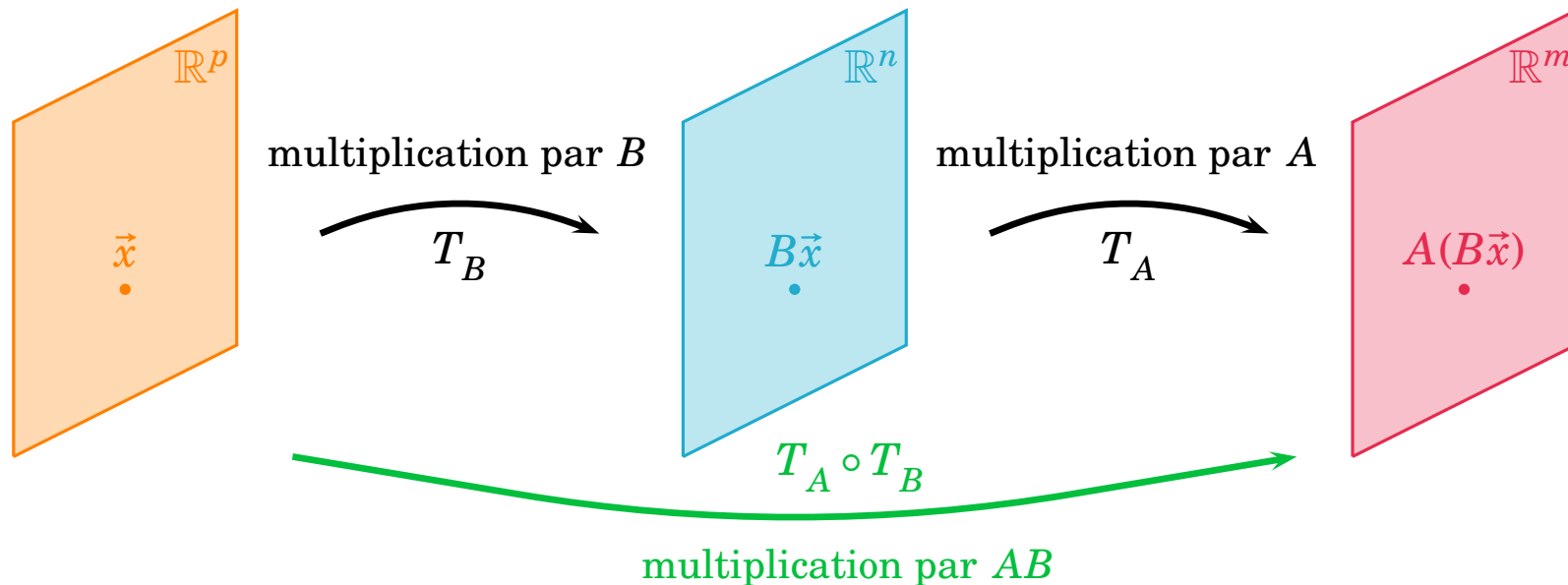
Théorème. Soient A , B et C des matrices de même taille et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ des scalaires.

- a) $A + B = B + A$ (commutativité de l'addition)
- b) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (associativité de l'addition)
- c) $A + O = A$ (élément neutre pour l'addition)
- d) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- e) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
- f) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$

Multiplication matricielle :

Soit A une matrice de taille $m \times n$ et soit $T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ l'application linéaire associée.

Soit B une matrice de taille $n \times p$ et soit $T_B: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'application linéaire associée.



Par construction, l'image d'un vecteur $\vec{x} \in \mathbb{R}^p$ par la composition $T_A \circ T_B: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ est

$$(T_A \circ T_B)(\vec{x}) = T_A(T_B(\vec{x})) = T_A(B\vec{x}) = A(B\vec{x}).$$

La matrice de taille $m \times p$ canoniquement associée à la composition $T_A \circ T_B: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ est appelée *matrice produit de A et B* , notée AB . Nous avons donc

$$(AB)\vec{x} = A(B\vec{x}), \quad \text{pour tout } \vec{x} \in \mathbb{R}^p.$$

Comme

$$B = \left[\vec{b}_1 \quad \vec{b}_2 \quad \cdots \quad \vec{b}_p \right] \quad \text{et} \quad B\vec{x} = x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2 + \cdots + x_p\vec{b}_p,$$

nous avons

$$\begin{aligned} (AB)\vec{x} &= A(B\vec{x}) \\ &= A(x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2 + \cdots + x_p\vec{b}_p) \\ &= x_1(A\vec{b}_1) + x_2(A\vec{b}_2) + \cdots + x_p(A\vec{b}_p) \\ &= \left[A\vec{b}_1 \quad A\vec{b}_2 \quad \cdots \quad A\vec{b}_p \right] \vec{x}, \quad \text{pour tout } \vec{x} \in \mathbb{R}^p. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$AB = \left[A\vec{b}_1 \quad A\vec{b}_2 \quad \cdots \quad A\vec{b}_p \right].$$

Autrement dit,

$$A \left[\vec{b}_1 \quad \vec{b}_2 \quad \cdots \quad \vec{b}_p \right] = \left[A\vec{b}_1 \quad A\vec{b}_2 \quad \cdots \quad A\vec{b}_p \right].$$

Exemple

Considérons $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ et $B = [\vec{b}_1 \quad \vec{b}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.

Nous avons

$$A\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$A\vec{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 34 \end{bmatrix}$$

d'où

$$AB = [A\vec{b}_1 \quad A\vec{b}_2] = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 16 & 34 \end{bmatrix}$$

Règle « ligne-colonne » du produit matriciel :

Soient

$$\begin{aligned} A &= [a_{jk}] \in M_{m,n}(\mathbb{R}), & \text{avec } 1 \leq j \leq m \text{ et } 1 \leq k \leq n, \\ B &= [b_{k\ell}] \in M_{n,p}(\mathbb{R}), & \text{avec } 1 \leq k \leq n \text{ et } 1 \leq \ell \leq p. \end{aligned}$$

Le produit des matrices A et B , noté AB , est la matrice de taille $m \times p$ dont les coefficients sont donnés par :

$$c_{j\ell} = a_{j1}b_{1\ell} + a_{j2}b_{2\ell} + a_{j3}b_{3\ell} + \dots + a_{jn}b_{n\ell} = \sum_{k=1}^n a_{jk}b_{k\ell}$$

Ainsi, le coefficient $c_{j\ell}$ est égal au produit scalaire de la j -ème ligne de A avec la ℓ -ème colonne de B :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2p} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix}.$$

Attention : le produit de A et B n'est pas défini si le nombre de colonnes de A n'est pas égal au nombre de lignes de B .

Exemple

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \text{ alors}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + (-4) \cdot 3 & 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + (-4) \cdot 6 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 5 \cdot 3 & 1 \cdot 4 + 0 \cdot 5 + 5 \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 16 & 34 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + 4 \cdot 0 & 1 \cdot (-4) + 4 \cdot 5 \\ 2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 & 2 \cdot 3 + 5 \cdot 0 & 2 \cdot (-4) + 5 \cdot 5 \\ 3 \cdot 2 + 6 \cdot 1 & 3 \cdot 3 + 6 \cdot 0 & 3 \cdot (-4) + 6 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 16 \\ 9 & 6 & 17 \\ 12 & 9 & 18 \end{bmatrix}$$