

Définition.

Soit $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une transformation.

- On dit que T est **surjective** si $\text{Im}(T) = \mathbb{R}^m$: tout vecteur de $\mathbb{R}^m$ est image d'**au moins un** vecteur de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire $T(\vec{x}) = \vec{b}$ admet **au moins une** solution $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$.
- On dit que T est **injective** si tout vecteur de $\mathbb{R}^m$ est image d'**au plus un** vecteur de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire $T(\vec{x}) = \vec{b}$ admet **au plus une** solution $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$.
- On dit que T est **bijjective** si tout vecteur de $\mathbb{R}^m$ est image d'**exactement un** vecteur de $\mathbb{R}^n$.

Théorème.

Soit $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire.

On a l'équivalence:

T est *injective* $\Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$ est l'*unique* solution de $T(\vec{x}) = \vec{0}$

Preuve.

$\Rightarrow$) Supposons que T est injective.

A voir : $\vec{x} = \vec{0}$ est l'unique solution de $T(\vec{x}) = \vec{0}$.

Comme T est linéaire, on a $T(\vec{0}) = \vec{0}$.

Par conséquent, $\vec{x} = \vec{0}$ est une solution de $T(\vec{x}) = \vec{0}$.

Comme T est injective, $T(\vec{x}) = \vec{0}$ admet *au plus* une solution.

Ainsi, $\vec{x} = \vec{0}$ est l'unique solution de $T(\vec{x}) = \vec{0}$.

⇐) On va montrer la contraposée :

« Si T n'est pas injective alors $\vec{x} = \vec{0}$ n'est pas l'unique solution de $T(\vec{x}) = \vec{0}$. »

Supposons que T n'est pas injective.

Alors il existe (au moins) un $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ tel que $T(\vec{x}) = \vec{b}$

admet plus d'une solution. Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ deux solutions

distinctes :
$$\begin{cases} T(\vec{u}) = \vec{b} \\ T(\vec{v}) = \vec{b} \end{cases} \quad \text{avec } \vec{u} \neq \vec{v} \text{ (autrement dit, } \vec{u} - \vec{v} \neq \vec{0} \text{)}$$

Comme T est linéaire, on a

$$T(\vec{u} - \vec{v}) = T(\vec{u}) - T(\vec{v}) = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}$$

Ainsi, $\vec{u} - \vec{v} \neq \vec{0}$ est aussi une solution de $T(\vec{x}) = \vec{0}$. ■

Théorème.

Soit $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire.

Soit A la matrice de taille $m \times n$ canoniquement associée à T .

Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. T injective

2. $T(\vec{x}) = \vec{b}$ admet au plus une solution pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$

3. $\vec{x} = \vec{0}$ est l'unique solution de $T(\vec{x}) = \vec{0}$

4. $\vec{x} = \vec{0}$ est l'unique solution de $A\vec{x} = \vec{0}$

5. $\vec{x} = \vec{0}$ est l'unique solution de $x_1 \vec{a}_1 + \dots + x_n \vec{a}_n = \vec{0}$

6. Les n colonnes de A sont linéairement indépendantes.

7. La forme échelonnée-réduite associée à A a un pivot par colonne.

Théorème.

Soit $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire.

Soit A la matrice de taille $m \times n$ canoniquement associée à T .

Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. T surjective
2. $T(\vec{x}) = \vec{b}$ admet au moins une solution pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$
3. $A\vec{x} = \vec{b}$ admet au moins une solution pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$
4. Tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ s'écrit comme combinaison linéaire des colonnes de A
5. Les n colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^m$.
6. $\text{Vect} \{ \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \} = \mathbb{R}^m$
7. La forme échelonnée-réduite associée à A a un pivot par ligne.