Théorème.

Soit A une matrice de taille $m \times n$.

Les affirmations suivantes sont équivalentes :

(c-à-d. que pour A donnée, elles sont toutes vraies ou toutes fausses)

1. L'équation matricielle $A\vec{x} = \vec{b}$ est consistante pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$.
2. Tout vecteur $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des colonnes de A.
3. Les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^m$: $\mathrm{Vect}\{\vec{a_1}, \dots, \vec{a_n}\} = \mathbb{R}^m$
4. La matrice échelonnée-réduite associée à A possède un pivot par ligne.

Preuve.

Les affirmations 1, 2 et 3 sont équivalentes à cause de la définition du produit $A\vec{x}$.

Soit R la forme échelonnée-réduite associée à la matrice A.

Nous avons donc $[A \mid \vec{b}\,] \sim [R \mid \vec{d}\,]$

Si 4) est vraie, alors la dernière ligne de R est non nulle et l'équation $A\vec{x}=\vec{b}$ est consistante pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ et 1) est vraie.

Si 4) est fausse, alors la dernière ligne de R est nulle et lorsque la dernière composante de $\vec{d}$ est non nulle, le système $A\vec{x}=\vec{b}$ n'a pas de solution. Par conséquent, 1) est fausse aussi. $\blacksquare$

Systèmes d'équations linéaires homogènes.

Définition.

Un système d'équations linéaires est appelé homogène s'il peut s'écrire sous la forme $A\vec{x} = \vec{0}$ où A est une matrice de taille $m \times n$ et $\vec{0} \in \mathbb{R}^m$.

Conséquence.

Un système homogène est toujours consistant car $\vec{x} = \vec{0} \in \mathbb{R}^n$ est une solution du système, appelée solution triviale.

Un vecteur non-nul $\vec{x} \neq \vec{0}$ solution du système sera appelée solution non-triviale.

Question. Sous quelle condition un système homogène possède des solutions non-triviales?

Conséquence (du théorème d'existence et unicité des solutions)

Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. $A\vec{x} = \vec{0}$ possède des solutions non-triviales
2. $A\vec{x} = \vec{0}$ possède une infinité de solutions
3. il y a des variables libres
4. il y a des colonnes de A qui ne sont pas associées à des pivots.

Formulation alternative :

Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. $A\vec{x} = \vec{0}$ ne possède pas des solutions non-triviales
2. $A\vec{x} = \vec{0}$ possède une solution unique $(\vec{x} = \vec{0})$
3. il n'y a pas de variables libres
4. la forme échelonnée-réduite associée à A possède un pivot par colonne.

Exemple.

Considérons le système homogène
$$\begin{cases} 2x-3y+4z=0 \\ x-y+3z=0 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$$

Les opérations élémentaires sur les lignes de le matrice augmentée associée nous donnent:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \begin{array}{c} \hphantom{1 \quad 0 \quad}\text{variable libre} \\ \hphantom{1 \quad 0 \quad}\downarrow \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Par conséquent, le système possède des solutions non-triviales:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

L'ensemble solution est donc $\mathrm{Vect}\left\{\begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ ou $\mathrm{Vect}\{(-5,-2,1)\}$.

Théorème. Soit A une matrice de taille $m \times n$.

Supposons que l'équation $A\vec{x}=\vec{b}$ est consistante pour un certain $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$.

Soit $\vec{p} \in \mathbb{R}^n$ une solution de $A\vec{x}=\vec{b}$ (c'est-à-dire tel que $A\vec{p}=\vec{b}$).

La solution générale de $A\vec{x}=\vec{b}$ est l'ensemble des vecteurs de

la forme $\vec{w}=\vec{p}+\vec{v}$ où $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ est une solution de $A\vec{x}=\vec{0}$.

Preuve. A voir : 1) $\vec{w}=\vec{p}+\vec{v}$ est une solution de $A\vec{x}=\vec{b}$

2) Toute solution s'écrit sous la forme $\vec{p}+\vec{v}$

1) Par hypothèse $\vec{p} \in \mathbb{R}^n$ est tel que $A\vec{p}=\vec{b}$

et $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ est tel que $A\vec{v}=\vec{0}$

On a $A\vec{w}=A(\vec{p}+\vec{v})=A\vec{p}+A\vec{v}=\vec{b}+\vec{0}=\vec{b}$

2) Soit $\vec{u}$ une autre solution de $A\vec{x}=\vec{b}$

On a $\left.\begin{array}{l} A\vec{u}=\vec{b} \\ A\vec{p}=\vec{b} \end{array}\right\} \Rightarrow A\vec{u}-A\vec{p}=\vec{b}-\vec{b} \Rightarrow A(\vec{u}-\vec{p})=\vec{0}$

$\Rightarrow \vec{v}=\vec{u}-\vec{p}$ est une solution de $A\vec{x}=\vec{0}$

$\Rightarrow \vec{u}=\vec{p}+\vec{v}$ $\blacksquare$

Remarque.

Le théorème nous dit que pour obtenir toutes les solutions de $A\vec{x}=\vec{b}$ il suffit de connaître :

- une solution $\vec{p}\in\mathbb{R}^n$ de $A\vec{x}=\vec{b}$
- toutes les solutions de $A\vec{x}=\vec{0}$

Indépendance linéaire.

Définition.

Soient $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ k vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

- On dit que l'ensemble $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ est linéairement indépendant (ou libre) si l'unique solution de l'équation vectorielle

$$x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \dots + x_k\vec{v}_k = \vec{0}$$

est la solution triviale $\vec{x} = \vec{0} \in \mathbb{R}^k$.

- On dit que l'ensemble $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, v_k\}$ est linéairement dépendant (ou lié) si l'équation vectorielle

$$x_1\vec{v_1} + x_2\vec{v_2} + \ldots + x_k\vec{v_k} = \vec{0}$$

possède une infinité de solutions.

En particulier, s'il existe des poids $c_1, \ldots, c_k$ non tous nuls tels que :

$$\boxed{c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2} + \ldots + c_k\vec{v_k} = \vec{0}.} \qquad (*)$$

On appelle $(*)$ une relation de dépendance linéaire.

Exemples.

1. Les vecteurs $\vec{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\vec{v_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$ sont linéairement indépendants car la matrice augmentée associée à l'équation vectorielle $x_1\vec{v_1} + x_2\vec{v_2} + x_3\vec{v_3} = \vec{0}$ est :

$$[\vec{v_1}\ \vec{v_2}\ \vec{v_3} \,|\, \vec{0}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{(solution unique)}$$

2. Les vecteurs $\vec{w_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{w_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\vec{w_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$ sont linéairement dépendants car la matrice augmentée associée à l'équation vectorielle $x_1\vec{w_1} + x_2\vec{w_2} + x_3\vec{w_3} = \vec{0}$ est :

$$[\vec{w_1}\ \vec{w_2}\ \vec{w_3} \,|\, \vec{0}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \text{ d'où } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

Une relation de dépendance linéaire est ici $2\vec{w_1} - 2\vec{w_2} + \vec{w_3} = \vec{0}$.

Remarque.

Soient $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ n vecteurs de $\mathbb{R}^m$

et soit $A = [\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_n]$ la matrice de taille $m \times n$ de colonnes $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$.

Nous avons les équivalences suivantes :

$\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$ ensemble libre $\iff$ $A\vec{x} = \vec{0}$ possède une solution unique.

$\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$ ensemble lié $\iff$ $A\vec{x} = \vec{0}$ possède une infinité de solutions.

Exemple.

Les colonnes de la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ sont linéairement dépendantes car la solution de $A\vec{x} = \vec{0}$ est

$$\vec{x} = t \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

Cas particuliers.

- L'ensemble $\{\vec{v}\}$ est linéairement indépendant si et seulement si $\vec{v} \neq \vec{0}$.
- L'ensemble $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est linéairement indépendant si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas multiples l'un de l'autre.

Théorème. (Caractérisation des ensembles linéairement dépendants)

Soient $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_k}$ k vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

L'ensemble $S = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_k}\}$ (avec $k \geq 2$) est linéairement dépendant si et seulement si, au moins un des vecteurs de S peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres.

Preuve.

$\Leftarrow$) Si $\vec{v_j} = \alpha_1 \vec{v_1} + \alpha_2 \vec{v_2} + \dots + \alpha_{j-1} \vec{v_{j-1}} + \alpha_{j+1} \vec{v_{j+1}} + \dots + \alpha_k \vec{v_k}$, alors :

$$\alpha_1 \vec{v_1} + \alpha_2 \vec{v_2} + \dots + \alpha_{j-1} \vec{v_{j-1}} + (-1) \vec{v_j} + \alpha_{j+1} \vec{v_{j+1}} + \dots + \alpha_k \vec{v_k} = \vec{0}$$

(relation de dépendance linéaire car $-1 \neq 0$).

$\Rightarrow$) Supposons que $S=\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_k\}$ est lié.

À voir : un des $\vec{v}_j$ s'écrit comme combinaison linéaire des autres.

- si $\vec{v}_1=\vec{0}$, alors nous pouvons écrire $\vec{v}_1 = 0\vec{v}_2 + 0\vec{v}_3 + \dots + 0\vec{v}_k$.
- si $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$, alors par hypothèse, il y a une relation de dépendance linéaire $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_k\vec{v}_k = \vec{0}$, avec $c_1,\dots,c_k$ non tous nuls.

Soit j le plus grand indice tel que $c_j \neq 0$.

Comme $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$, nous avons $j>1$ car sinon, $c_1\vec{v}_1=\vec{0}$, avec $c_1 \neq 0$ impossible !

Ainsi, $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_j\vec{v}_j = \vec{0} \Rightarrow c_j\vec{v}_j = -c_1\vec{v}_1 - c_2\vec{v}_2 - \dots - c_{j-1}\vec{v}_{j-1}$

et $\vec{v}_j$ s'écrit comme combinaison linéaire de $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_{j-1},\vec{v}_{j+1},\dots,\vec{v}_k$:

$$\vec{v}_j = -\frac{c_1}{c_j}\vec{v}_1 - \frac{c_2}{c_j}\vec{v}_2 - \dots - \frac{c_{j-1}}{c_j}\vec{v}_{j-1} + 0\vec{v}_{j+1} + \dots + 0\vec{v}_k \quad \blacksquare$$

Théorème.

Soient $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ k vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Si $k > n$, alors les vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ sont forcément liés.

Preuve.

La matrice $A = [\vec{v}_1 \dots \vec{v}_k]$ est une matrice de taille $n \times k$.

Si $k > n$, alors la matrice augmentée associée à $A\vec{x} = \vec{0}$ possède forcément des variables libres, ce qui implique la dépendance linéaire de $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$. $\blacksquare$

Théorème.

Si un ensemble $S = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ contient le vecteur nul, alors il est forcément lié.

Preuve.

Supposons que $\vec{v}_1 = \vec{0}$ (sinon on renumérote les vecteurs).

Nous avons la relation de dépendance linéaire :

$$1\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + 0\vec{v}_3 + \ldots + 0\vec{v}_k = \vec{0}$$

$\blacksquare$