Exemple.

Trouver l'équation du plan engendré par $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Par définition, le plan cherché est $\mathrm{Vect}\{\vec{u}, \vec{v}\}$.

On cherche la condition d'appartenance à $\mathrm{Vect}\{\vec{u}, \vec{v}\}$, autrement dit, la condition d'existence des solutions du système associé à la matrice augmentée. On a :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 2 & 3 & b \\ 3 & 5 & c \end{array}\right] \underset{\substack{L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_3 \to L_3 - 3L_1}}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & b-2a \\ 0 & 2 & c-3a \end{array}\right] \underset{L_3 \to L_3 - 2L_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & b-2a \\ 0 & 0 & c-2b+a \end{array}\right]$$

Par conséquent,

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathrm{Vect}\{\vec{u}, \vec{v}\} \iff c - 2b + a = 0$$

Comme $c = 2b - a$, les vecteurs de $\mathrm{Vect}\{\vec{u}, \vec{v}\}$ sont de la forme

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ 2b-a \end{bmatrix} \quad \text{, avec } a, b \in \mathbb{R}$$

On a donc un critère très simple pour déterminer si un vecteur appartient à $\mathrm{Vect}\{\vec{u}, \vec{v}\}$:

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} \notin \mathrm{Vect}\{\vec{u}, \vec{v}\}$ car $2 \cdot 0 - 0 = 0 \neq 7$.

Par contre, $\begin{bmatrix} 2024 \\ 2023 \\ 2022 \end{bmatrix} \in \mathrm{Vect}\{\vec{u}, \vec{v}\}$ car $2 \cdot 2023 - 2024 = 2022$.

Comme les éléments de $\mathrm{Vect}\{\vec{u}, \vec{v}\}$ sont de la forme $\begin{bmatrix} a \\ b \\ 2b-a \end{bmatrix}$

l'équation du plan engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est donc

$$z = 2y - x \iff x - 2y + z = 0$$

L'équation matricielle $A\vec{x}=\vec{b}$.

Définition. Soit $A=[a_{jk}]=[\vec{a}_1\ \vec{a}_2 \cdots \vec{a}_n]$ une matrice de taille $m \times n$ de colonnes $\vec{a}_1=\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$, $\vec{a}_2=\begin{bmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}$, ..., $\vec{a}_n=\begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$

et soit $\vec{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur.

On définit le produit de A avec $\vec{x}$, noté $A\vec{x}$, comme le vecteur de $\mathbb{R}^m$ obtenu en prenant la combinaison linéaire des colonnes de A avec comme poids, les composantes de $\vec{x}$:

$$A\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_n\vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$$

Remarque.

Le produit $A\vec{x}$ est défini si et seulement si, le nombre de colonnes de A est égal au nombre de composantes de $\vec{x}$.

Exemple.

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ (matrice de taille 2×3) et $\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$,

alors par définition,

$$A\vec{x} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 \\ 24 \end{bmatrix} \Rightarrow A\vec{x} = \begin{bmatrix} 20 \\ 47 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Rappel.

Si $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, alors le produit scalaire (euclidien) est défini par

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n = \sum_{j=1}^{n} u_j v_j .$$

Règle "ligne-colonne".

La j-ème composante du vecteur $A\vec{x} \in \mathbb{R}^m$ est le produit scalaire de la j-ème ligne de A avec le vecteur colonne $\vec{x}$.

Exemple. Soient A et $\vec{x}$ comme dans l'exemple précédent. Alors

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix} = 2+6+12=20 \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix} = 8+15+24=47$$

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4\\4\cdot 2+5\cdot 3+6\cdot 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}20\\47\end{bmatrix}$$

Remarque.

La règle "ligne-colonne" est pratique pour calculer explicitement les composantes de $A\vec{x}$. Par contre, voir $A\vec{x}$ comme combinaison linéaire des colonnes de A est utile pour des calculs théoriques (démonstrations, etc.)

Théorème.

Soit A une matrice de taille $m \times n$. Soient $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$ un scalaire. Nous avons:

1. $A(\vec{u}+\vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v}$
2. $A(\lambda\vec{u}) = \lambda(A\vec{u})$

Preuve.

Si $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$, alors $\vec{u}+\vec{v} = \begin{bmatrix} u_1+v_1 \\ \vdots \\ u_n+v_n \end{bmatrix}$ et $\lambda\vec{u} = \begin{bmatrix} \lambda u_1 \\ \vdots \\ \lambda u_n \end{bmatrix}$

$$1.\ A(\vec{u}+\vec{v}) \overset{\text{déf}}{=} (u_1+v_1)\vec{a}_1 + \dots (u_n+v_n)\vec{a}_n = u_1\vec{a}_1 + v_1\vec{a}_1 + \dots + u_n\vec{a}_n + v_n\vec{a}_n$$

$$= (u_1\vec{a}_1 + \dots + u_n\vec{a}_n) + (v_1\vec{a}_1 + \dots + v_n\vec{a}_n) \overset{\text{déf}}{=} A\vec{u} + A\vec{v}$$

$$2.\ A(\lambda\vec{u}) \overset{\text{déf}}{=} (\lambda u_1)\vec{a}_1 + \dots + (\lambda u_n)\vec{a}_n = \lambda(u_1\vec{a}_1 + \dots + u_n\vec{a}_n) \overset{\text{déf}}{=} \lambda(A\vec{u})$$

$\blacksquare$

Théorème.

Soit $A = [\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \cdots\ \vec{a}_n]$ une matrice de taille $m \times n$.

Soit $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$. Alors

- l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$, appelée équation matricielle,
- l'équation vectorielle $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}$,
- le système d'équations linéaires associé à la matrice augmentée

$$[\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \cdots\ \vec{a}_n \mid \vec{b}]$$

possèdent tous les trois le même ensemble solution.

Existence de solutions:

L'équation matricielle $A\vec{x}=\vec{b}$ possède une solution si et seulement si $\vec{b}$ est une combinaison linéaire des colonnes de la matrice A.

Autrement dit,

$$A\vec{x}=\vec{b} \text{ est consistante} \iff \vec{b}\in \mathrm{Vect}\{\vec{a_1},\dots,\vec{a_n}\}$$

Deux questions se posent:

Question 1: Comment déterminer si $\vec{b}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des colonnes de A ?

Question 2: Comment déterminer si l'équation matricielle $A\vec{x}=\vec{b}$ est consistante pour tout choix de $\vec{b}\in\mathbb{R}^m$?

Exemple.

Soient $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$.

Déterminer sous quelles conditions l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ est consistante.

Autrement dit, sous quelles conditions $\vec{b} \in \text{Vect}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$.

Considérons la matrice augmentée $[A|\vec{b}]$. On a :

$$[A|\vec{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & b_1 \\ 1 & -1 & 3 & b_2 \\ 1 & -2 & 1 & b_3 \end{array}\right] \underset{L_1 \to L_1 - L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & b_1 - b_2 \\ 1 & -1 & 3 & b_2 \\ 1 & -2 & 1 & b_3 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & b_1 - b_2 \\ 0 & 1 & 2 & 2b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - b_1 + b_2 \end{array}\right]$$

Condition d'existence des solutions :

$$b_3 - b_1 + b_2 = 0 \iff b_3 = b_1 - b_2$$

Par conséquent,

$$A\vec{x}=\vec{b} \text{ est consistante } \Leftrightarrow \vec{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_1-b_2 \end{bmatrix}, \text{ avec } b_1, b_2 \in \mathbb{R}$$

Comme $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_1-b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\,b_1 + 0\,b_2 \\ 0\,b_1 + 1\,b_2 \\ 1\,b_1 - 1\,b_2 \end{bmatrix} = b_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + b_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = b_1\vec{u}_1 + b_2\vec{u}_2$,

nous trouvons:

$$A\vec{x}=\vec{b} \text{ est consistante } \Leftrightarrow \vec{b} \in \text{Vect}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$$

Ainsi, $\text{Vect}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\} = \text{Vect}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$

(plan dans $\mathbb{R}^3$ qui contient $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ et $\vec{0}$).

Autrement dit, la partie de $\mathbb{R}^3$ engendrée par les colonnes de A est aussi engendrée par les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.

En particulier, on vérifie facilement que les colonnes de A s'écrivent comme des combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$:

$$\vec{a_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 2\vec{u_1} + \vec{u_2}$$

$$\vec{a_2} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = -3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -3\vec{u_1} - \vec{u_2}$$

$$\vec{a_3} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 4\vec{u_1} + 3\vec{u_2}$$

<u>Remarque.</u> Dans ce cas, on peut montrer que $\vec{a_3} = 5\vec{a_1} + 2\vec{a_2}$, d'où

$$\begin{aligned} \operatorname{Vect}\{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}\} &= \operatorname{Vect}\{\vec{a_1}, \vec{a_2}\} \\ &= \operatorname{Vect}\{\vec{a_1}, \vec{a_3}\} \\ &= \operatorname{Vect}\{\vec{a_2}, \vec{a_3}\} \end{aligned}$$