L'espace $\mathbb{R}^n$

Définition. Une matrice de taille $m \times 1$ (c'est-à-dire formée d'une seule colonne) est appelée *vecteur colonne* ou *vecteur*.

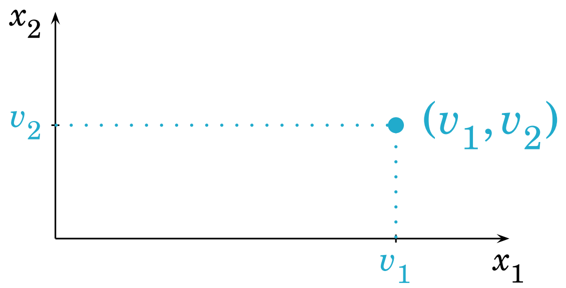
Les coefficients d'un vecteur (colonne) sont appelés *composantes*.

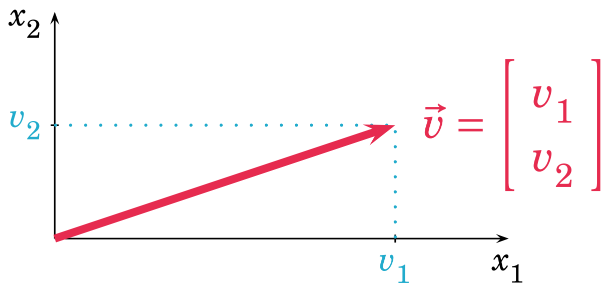
L'ensemble des vecteurs à deux composantes est noté $\mathbb{R}^2$.

Les éléments de $\mathbb{R}^2$ sont de la forme

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \qquad \text{avec } v_1, v_2 \in \mathbb{R}.$$

Remarque. Nous allons identifier les points du plan avec les vecteurs de $\mathbb{R}^2$:





Le vecteur de composantes v_1 et v_2 sera noté parfois (v_1, v_2) au lieu de $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$.

Attention : Ne pas confondre (v_1, v_2) avec $\begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}$ (matrice de taille 1×2).

Opérations dans $\mathbb{R}^2$

Addition :

Si $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$, alors

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Multiplication par un scalaire[1] *:*

Si $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\lambda\vec{v} = \lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Remarque. L'ensemble des vecteurs de la forme $\lambda\vec{v}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$, est la droite du plan qui passe par l'origine de vecteur directeur $\vec{v}$.

1. Pour les physiciens, un scalaire est une quantité physique qui ne comporte qu'une grandeur. Pour les mathématiciens, un scalaire est un nombre.

De manière générale, nous pouvons définir $\mathbb{R}^n$, avec $n \geqslant 3$, comme l'ensemble des vecteurs (colonne) de la forme

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, \qquad \text{avec } v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R},$$

muni des opérations d'addition de vecteurs et multiplication par un scalaire :

- *addition :* si $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$, alors

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

- *multiplication par un scalaire :* si $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\lambda \vec{v} = \lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \\ \vdots \\ \lambda v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Propriétés algébriques de $\mathbb{R}^n$

(A1) L'addition est commutative :

$$\vec{v}+\vec{w}=\vec{w}+\vec{v}, \qquad \text{pour tout } \vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^n.$$

(A2) L'addition est associative :

$$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}), \qquad \text{pour tout } \vec{u},\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^n.$$

(A3) Le vecteur $\vec{0}=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$ est l'élément neutre pour l'addition :

$$\vec{v}+\vec{0}=\vec{v} \qquad \text{et} \qquad \vec{0}+\vec{v}=\vec{v} \qquad \text{pour tout } \vec{v}\in\mathbb{R}^n.$$

(A4) Le vecteur $-\vec{v}=(-1)\vec{v}$ est l'opposé de $\vec{v}$:

$$\vec{v}+(-\vec{v})=\vec{0} \qquad \text{et} \qquad (-\vec{v})+\vec{v}=\vec{0}$$

(A5) Si $\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^n$ et $\alpha\in\mathbb{R}$ alors $\alpha(\vec{v}+\vec{w})=\alpha\vec{v}+\alpha\vec{w}$.

(A6) Si $\vec{v}\in\mathbb{R}^n$ et $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ alors $(\alpha+\beta)\vec{v}=\alpha\vec{v}+\beta\vec{v}$.

(A7) Si $\vec{v}\in\mathbb{R}^n$ et $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ alors $(\alpha\beta)\vec{v}=\alpha(\beta\vec{v})$.

(A8) Si $\vec{v}\in\mathbb{R}^n$ alors $1\vec{v}=\vec{v}$.

Remarque. Nous verrons plus tard qu'il y a d'autres ensembles qui satisfont ces propriétés. Ce sont les *espaces vectoriels*.

Combinaisons linéaires

Définition. Soient $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$ des vecteurs donnés.

Le vecteur

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \cdots + \alpha_k \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n, \qquad \text{avec } \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R},$$

est appelée *combinaison linéaire* des vecteurs $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ de poids respectifs $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

Exemple

Comme

$$3 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ -14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 1 \end{bmatrix},$$

le vecteur $\vec{v} = \begin{bmatrix} 14 \\ 1 \end{bmatrix}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ et $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix}$ de poids respectifs $\alpha_1 = 3$ et $\alpha_2 = 2$.

Question : Considérons les vecteurs suivants :

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 11 \\ 19 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Est-ce que le vecteur $\vec{v}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$? Autrement dit, est-ce qu'il existe des nombres $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{v} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2$?

Nous avons :

$$\begin{bmatrix} 11 \\ 19 \\ 6 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 \\ 5\alpha_1 + \alpha_2 \\ -2\alpha_1 + 3\alpha_2 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 11 \\ 5\alpha_1 + \alpha_2 = 19 \\ -2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 6 \end{cases}$$

Matrice augmentée :

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 11 \\ 5 & 1 & 19 \\ -2 & 3 & 6 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2 \to L_2 - 5L_1 \\ L_3 \to L_3 + 2L_1}}{\widetilde{\qquad}} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 11 \\ 0 & -9 & -36 \\ 0 & 7 & 28 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2 \to -\frac{1}{9}L_2 \\ L_3 \to \frac{1}{7}L_3}}{\widetilde{\qquad}} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2 \to L_2 - 5L_1 \\ L_3 \to L_3 + 2L_1}}{\widetilde{\qquad}} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Ainsi, $\vec{v}$ est combinaison linéaire de $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ avec poids respectifs $\alpha_1 = 3$ et $\alpha_2 = 4$.

Remarque. La matrice augmentée est ici $\left[\begin{array}{cc|c} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v} \end{array}\right]$.

Equations vectorielles

Considérons maintenant l'équation vectorielle

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_k\vec{a}_k = \vec{b}\,,$$

où $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ sont donnés et $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$ sont à déterminer.

Cette équation vectorielle possède la même solution générale que le système d'équations linéaires associé à la matrice augmentée $\left[\begin{array}{cccc|c} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_k & \vec{b} \end{array}\right]$.

En particulier, nous avons l'équivalence suivante :

le vecteur $\vec{b}$ est combinaison linéaire de $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$	$\iff$	le système d'équations linéaires associé à la matrice augmentée $\left[\begin{array}{cccc\|c} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_k & \vec{b} \end{array}\right]$ est consistant

Définition. Soient $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$ des vecteurs donnés.

Le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ formé de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ est appelé *partie (de $\mathbb{R}^n$) engendrée par les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$*, noté $\mathrm{Vect}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$.

Nous avons donc

$$\mathrm{Vect}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\} = \{\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_k\vec{v}_k \in \mathbb{R}^n : \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n\,.$$

En anglais, on note $\mathrm{Span}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$.

Remarques.

- Par construction, pour chaque $j \in \{1, \ldots, k\}$, les vecteurs de la forme $\lambda \vec{v}_j$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$, se trouvent dans $\mathrm{Vect}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$.

  En particulier, en prenant $\lambda = 0$, nous trouvons que
$$\vec{0} \in \mathrm{Vect}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\},$$
  quelque soit le choix des vecteurs $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$.

- Nous avons les équivalences suivantes :

$\vec{b} \in \mathrm{Vect}\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k\}$ $\iff$ le vecteur $\vec{b}$ est combinaison linéaire de $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$

$\iff$ l'équation vectorielle $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_k\vec{a}_k = \vec{b}$ possède (au moins) une solution

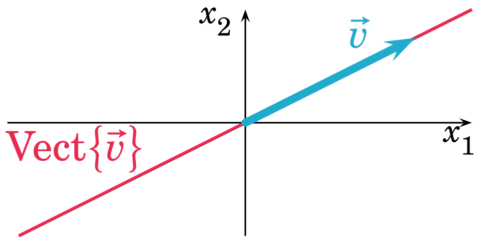
$\iff$ le système d'équations linéaires associé à la matrice augmentée $\left[\begin{array}{cccc|c} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_k & \vec{b} \end{array}\right]$ est consistant

Interprétation géométrique de $\text{Vect}\{\vec{v}\}$

Soit $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, avec $n = 2$ ou $n = 3$.

- Si $\vec{v} = \vec{0}$, alors $\text{Vect}\{\vec{v}\} = \{\vec{0}\}$.
- Si $\vec{v} \neq \vec{0}$, alors $\text{Vect}\{\vec{v}\}$ est la droite de $\mathbb{R}^n$ de vecteur directeur $\vec{v}$ qui passe par l'origine.

  Illustration ($n = 2$) :



Interprétation géométrique de $\text{Vect}\{\vec{u}, \vec{v}\}$

Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, avec $n = 2$ ou $n = 3$.

- Si $\vec{u} = \vec{0}$ et $\vec{v} = \vec{0}$, alors $\text{Vect}\{\vec{u}, \vec{v}\} = \{\vec{0}\}$.
- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\text{Vect}\{\vec{u}, \vec{v}\} = \text{Vect}\{\vec{u}\}$ est la droite de $\mathbb{R}^n$ de vecteur directeur $\vec{u}$ qui passe par l'origine.
- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ et s'il n'existe pas $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$, alors $\text{Vect}\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est le plan de $\mathbb{R}^n$ qui contient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{0}$.

  En particulier, si $n = 2$, alors $\text{Vect}\{\vec{u}, \vec{v}\} = \mathbb{R}^2$.