

**Remarque.** Si pendant l'échelonnement une des lignes a la forme :

$$0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ | \ b \quad \text{avec } b \neq 0,$$

nous arrêtons l'échelonnement et concluons que le système ne possède pas de solution car l'équation associée à cette ligne est

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \dots + 0x_n = b \neq 0.$$

Dans le cas contraire, nous avons un certain nombre de lignes nulles :

$$0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ | \ 0$$

situées en bas de la matrice et le système est consistant.

Soit  $r > 0$  le nombre de lignes non-nulles d'une matrice échelonnée associée à un système à  $m$  équations et  $n$  inconnues.

Par construction nous avons  $r \leq m$ .

Nous distinguons deux cas :

- $r = n$  : Nous avons un système de  $r$  équations à  $r$  inconnues et la solution est unique.
- $r < n$  : Nous avons plus d'inconnues que d'équations et de ce fait, une infinité de solutions.

## Matrices échelonnées-réduites

Si une matrice échelonnée possède  $r$  lignes non-nulles, avec  $r < n$ , alors le système associé a une infinité de solutions. Pour expliciter ces solutions, il peut s'avérer utile d'effectuer des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice augmentée de manière à obtenir une matrice échelonnée-réduite équivalente.

**Définition.** Une matrice est dite *échelonnée-réduite* si elle est échelonnée, telle que tous les coefficients principaux sont des pivots (c'est-à-dire égaux à 1) et si dans toute colonne qui contient un pivot, tous les autres éléments sont nuls.

## Exemples

Les matrices suivantes sont échelonnées-réduites :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Les matrices suivantes **ne sont pas** échelonnées-réduites :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

## Méthode de réduction de Gauss–Jordan

- 1) Echelonner la matrice augmentée associée au système.
- 2) Si  $r < n$ , réduire la matrice échelonnée.
- 3) Considérer le système associé à la matrice augmentée ainsi obtenue et le résoudre.

### Remarque.

Lorsque la solution d'un système d'équations linéaires est unique, l'élimination de Gauss suivie de la « substitution à rebours » est plus rapide que la réduction de Gauss-Jordan. Toutefois, pour des systèmes « petits » (jusqu'à 4-5 équations/inconnues), le temps de calcul « à la main » est comparable.

### Définition.

- Les variables associées aux *pivots* s'appellent *variables principales* ou *variables liées*.
- Les variables associées aux colonnes *sans pivot* s'appellent *variables secondaires* ou *variables libres*.

## Exemples

Déterminer la solution générale (si elle existe) des systèmes d'équations linéaires suivants :

$$1. \begin{cases} 2x - 3y + 4z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

Matrice augmentée :

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right] & \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - L_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right] & \xrightarrow{\substack{L_2 \rightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_1}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 + 2L_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x & y & z \end{matrix}$

Systeme associé :

$$\begin{cases} x + 5z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -5z \\ y = -2z \end{cases}$$

Si  $z = t$ , avec  $t \in \mathbb{R}$  quelconque, alors

$$\begin{cases} x = -5t, \\ y = -2t, \\ z = t, \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R} \quad (\text{infinité de solutions})$$

Notation vectorielle :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

Géométriquement, il s'agit de la droite qui passe par l'origine de vecteur directeur  $\begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

Les variables  $x$  et  $y$  sont principales (ou liées).

La variable  $z$  est secondaire (ou libre).

$$2. \begin{cases} x - 5y + 3z + 6u = 14 \\ -2y + 7u = 12 \\ 2x - 5y + 6z - 5u = -1 \end{cases}$$

Comme il y a plus d'inconnues que d'équations, ici il convient de réduire (car il n'y a pas de solution unique).

Matrice augmentée :

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - 2L_1} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 + 2L_2} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -5 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_2} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} L_1 \rightarrow L_1 + 5L_2 \\ L_3 \rightarrow L_3 + 2L_2 \end{array}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & -9 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{\begin{array}{l} L_1 \rightarrow L_1 + 9L_3 \\ L_2 \rightarrow L_2 + 3L_3 \end{array}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \\ & \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x & y & z & u \end{array} \end{aligned}$$

Système associé :

$$\begin{cases} x + 3z = 7 \\ y = 1 \\ u = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 7 - 3z \\ y = 1 \\ u = 2 \end{cases}$$

Si  $z = t$ , avec  $t \in \mathbb{R}$  quelconque, alors

$$\begin{cases} x = 7 - 3t \\ y = 1 \\ z = t \\ u = 2 \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R} \quad (\text{infinité de solutions})$$

Notation vectorielle :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 - 3t \\ 1 + 0t \\ 0 + 1t \\ 2 + 0t \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

Les variables  $x$ ,  $y$  et  $u$  sont principales (ou liées).

La variable  $z$  est secondaire (ou libre).

3. Déterminer les valeurs des paramètres  $a, b, c \in \mathbb{R}$  pour lesquels le système

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ -x - y + z = b \\ x + y + 3z = c \end{cases}$$

possède des solutions. Déterminer ces solutions.

Nous avons un système à 3 équations et 3 inconnues  $(x, y, z)$ .

Matrice augmentée :

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ -1 & -1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 3 & c \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{L_2 \rightarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_1}]{} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 2 & b+a \\ 0 & 0 & 2 & c-a \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - L_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 2 & a+b \\ 0 & 0 & 0 & c-2a-b \end{array} \right]$$

La condition d'existence des solutions est

$$c - 2a - b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad c = 2a + b$$

- Si  $a, b, c \in \mathbb{R}$  sont tels que  $c \neq 2a + b$ , alors le système n'a pas de solution
- Si  $a, b, c \in \mathbb{R}$  sont tels que  $c = 2a + b$ , alors le système possède une infinité de solutions

Considérons le cas  $c = 2a + b$ . Nous avons :

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 2 & a+b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 \rightarrow \frac{1}{2}L_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}(a+b) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - L_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2}(a-b) \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}(a+b) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x & y & z \end{array}$

Système associé :

$$\begin{cases} x + y = \frac{1}{2}(a - b) \\ z = \frac{1}{2}(a + b) \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2}(a - b) - y \\ z = \frac{1}{2}(a + b) \end{cases}$$

Si  $y = t$ , avec  $t \in \mathbb{R}$  quelconque, alors

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(a - b) - t \\ y = t \\ z = \frac{1}{2}(a + b) \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R} \quad (\text{infinité de solutions})$$

Notation vectorielle :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(a - b) \\ 0 \\ \frac{1}{2}(a + b) \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

### **Théorème (Théorème d'existence et d'unicité).**

Un système linéaire est consistant si et seulement si, lors de l'échelonnement, il n'y a pas de ligne de la forme

$$0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ | \ b \quad \text{avec } b \neq 0.$$

Si un système linéaire est consistant, alors

- la solution est unique s'il n'y a pas de variables libres,
- le système possède une infinité de solutions s'il y a au moins une variable libre.

Soit  $m$  le nombre d'équations du système et soit  $n$  le nombre d'inconnues.

Voici quelques situations possibles :

$$m = n$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right]$$

pas de solution

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{array} \right]$$

solution unique

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

infinité de solutions

$$m > n$$

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 7 \end{array} \right]$$

pas de solution

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

solution unique

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

infinité de solutions

$$m < n$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & * & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right]$$

pas de solution

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & * & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{array} \right]$$

infinité de solutions

## Théorème (Unicité de la forme échelonnée-réduite).

Soit  $A$  une matrice de taille  $m \times n$ .

Alors  $A$  est équivalente à une unique matrice échelonnée-réduite de taille  $m \times n$ .

*Preuve.* Voir l'Annexe A du livre de Lay ou le site Moodle du cours :

<https://moodle.epfl.ch/mod/resource/view.php?id=959673> ■

### Exemple

Soit  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$  une matrice de taille  $2 \times 3$  quelconque.

La matrice  $A$  est équivalente à l'une des matrices échelonnées-réduites suivantes :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & * \\ 0 & \mathbf{1} & * \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & * & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (2 \text{ pivots})$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & * & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1 \text{ pivot})$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (0 \text{ pivots})$$