Programme détaillé (mais approximatif) du cours d'Algèbre Linéaire - MATH-111(f)

Stanislas Herscovich

Le programme suivant indique les parties du polycopié pas S. Friedli et S. Herscovich, *Algèbre Linéaire* (disponible sur la page Moodle du cours), que l'on discutera en cours plus en détail. En tout cas, **on remarque que l'intégralité du polycopié est au programme** (avec exception des parties marquées avec une étoile dans le même polycopié).

Pour référence, § désigne une section du polycopié (*e.g.* §1.3.1 désigne la section 1.3.1) et on utilise les abréviations suivantes: **COR** = corollaire, **DÉF** = définition, **EXM** = exemple, **LEM** = lemme, **METH** = méthode, **MOT** = motivation, **POR** = porisme, **PROP** = proposition, **QUE** = question, **REM** = remarque, **THM** = théorème. [**XXX**]* dénote que ce n'est pas sûr que l'on verra le résultat [**XXX**] en cours, tandis que [**XXX**⋆] indique que l'on a modifié légèrement en cours la référence [**XXX**] du polycopié.

On remarque qu'il s'agit d'un programme de contenus du cours: **les activités que l'on fera dans le cours**, comme des quiz ou le travail en classe pour résoudre des exercices, **ne sont pas indiqués**.

Sem.	Cours	Référence	Contenus
Chapitre 1 : Systèmes d'équations linéaires			
Semaine 1	Cours 1	[**DÉF 1.2**]	Définition de **système d'équations linéaires (SEL)** à coefficients dans $\mathbb{R}$
		[**EXM**]	Exemple d'un SEL
		[**DÉF 1.4**]	Définition de **solution(s)** d'un SEL, de SEL **incompatible** et **compatible**, **déterminé** et **indéterminé**
		[**EXM 1.5**]	Exemple d'un SEL incompatible
		[**EXM**]	Exemple d'un SEL compatible déterminé
		[**EXM 1.6**]	Exemple d'un SEL compatible indéterminé
		[**THM 1.7**]*	Un SEL compatible possède soit 1 unique solution, soit une infinité.
		§1.3.1	Représentation et résolution graphique d'un SEL avec 2 variables
		[**DÉF 1.13**]	Définition d'**opérations élémentaires sur les lignes (OEL)** et SEL **ligne-équivalents**
		[**THM 1.16**]	Deux SEL ligne-équivalents ont les mêmes ensembles de solutions
		[**EXM 1.17**]	Résolution d'un SEL à 3 variables et 3 équations
	Cours 2	[**DÉF 1.18**]	Définition de **matrice** et **matrice augmentée** associées à un SEL
		[**EXM 1.17**]	Exemple de matrice augmentée d'un SEL (suite)
		[**DÉF**]	Définition de **matrices/matrices augmentées ligne-équivalentes et opérations élémentaires sur les lignes (OEL)** pour matrices/matrices augmentées
		[**DÉF 1.20**]	Définition de **taille d'une matrice**, **coefficient principal** d'une ligne et **matrice échelonnée**
		[**EXM**]	Plusieurs exemples de matrices échelonnées et non échelonnées
		[**DÉF 1.28**]	Définition de **matrice échelonnée réduite**, **pivot** et **variables libres** et **liées** d'un SEL

Sem.	Cours	Référence	Contenus
		[EXM]	Plusieurs exemples de matrices échelonnées réduites et non échelonnées
		[THM 1.31]	Toute matrice est ligne-équivalente à une unique matrice échelonnée réduite $\longrightarrow$ Cela définit **forme échelonnée réduite (FER)**
		[METH]	**Méthode de Gauss-Jordan**
		[EXM 1.30]	Résolution d'un SEL à trois variables et 3 lignes
		[EXM 1.17]	Exemple d'un SEL incompatible $\longrightarrow$ Ligne nulle sur la partie non augmentée du FER avec second membre non nul
		[COR 1.32]	Critère pour décider si SEL est incompatible, compatible indéterminé ou compatible déterminé
Chapitre 2 : Vecteurs de $\mathbb{R}^n$			
	Cours 3	**§2.1.1**	Définition de **vecteur (colonne)** dans $\mathbb{R}^n$ et sa **taille**
		§2.1.1	Égalité, **somme** et **multiplication par scalaires** des vecteurs, **vecteur nul** et **vecteur opposé**
		[PROP 2.3]	Propriétés (V.1)-(V.8) de la somme et multiplication par scalaires des vecteurs
		[DÉF 2.5]	Définition de **vecteurs colinéaires**
		[DÉF 2.8]	Définition de **combinaison linéaire (CL)**
		[EXM 2.10]	Exemple de calcul pour déterminer si un vecteur est CL d'autres deux vecteurs
		[DÉF 2.12]*	Définition de **sous-espace vectoriel engendré** $\mathrm{Vect}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ (ou **partie engendrée**) par une famille de vecteurs dans $\mathbb{R}^n$
		[EXM]	Dessin du droite engendrée par un vecteur non nul
		[DÉF 2.18]	Définition de famille **liée** et **libre**
		[QUE]	Question sur plusieurs énoncés: équivalent à être libre ou non?
		[EXM 2.20]	Calcul pour déterminer si une famille de vecteurs est libre ou liée
		§2.3.2	Définition de la famille de vecteurs **base canonique** de $\mathbb{R}^n$ (seulement comme ensemble de vecteurs, sans définir notion de base)
		[THM 2.22]	Une famille est liée ssi un de ses vecteurs est CL des autres
Chapitre 3 : Forme vectorielle des systèmes d'équations linéaires			
Semaine 2		[DÉF 3.1]	Définition de matrice à partir de colonnes, et de **produit de matrice avec vecteur (colonne)**
		[PROP 3.2]	$\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ famille génératrice = FER de $[\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_p]$ possède un pivot par ligne
		[LEM 3.3]	Linéarité du produit d'une matrice avec des vecteurs colonnes
	Cours 4	**§3.1.2**	SEL = Forme vectorielle du SEL
		[DÉF 3.6]	Définition de **SEL homogène et inhomogène**
		§3.3.1	Définition de **solution triviale** de SEL homogène
		[EXM 3.16*]	Calcul de solution d'un SEL homogène
		[LEM 3.12]	$\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ famille libre = FER de $[\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_p]$ possède un pivot par colonne
		[THM 3.14]	Toute famille de plus de n vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ est liée
		[PROP 3.15]	Toute solution d'un SEL inhomogène s'écrit comme somme d'une solution particulière et d'une solution générale du SEL homogène associé
		[EXM 3.16]	(suite) Exemple de résolution d'un SEL inhomogène sachant une solution particulière
		[THM 3.5]*	Un SEL compatible possède soit 1 unique solution, soit une infinité (autre version du [THM 1.7])

Sem.	Cours	Référence	Contenus
		[DÉF 3.18]	Définition d'**application linéaire (AL)** de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$
		[EXM 3.21]	Un exemple d'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$
		[EXM 3.22]	Le produit de matrices et vecteurs donne une AL
		§3.4.2	Formulation équivalente d'un SEL en terme d'une AL
		[THM 3.24]	Définition et unicité de **matrice canonique** $[T]$ d'une AL T de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$
Chapitre 4 : Définitions abstraites I			
Semaine 3	**Cours 5**	**[DÉF 4.2]**	Définition de **espace vectoriel (EV)** (réel) par axiomes (EV.1)-(EV.8) $\longrightarrow$ On a désormais $\boxed{\text{vecteur = élément d'un EV}}$
		§4.2.1-4.2.4	Exemples d'espaces vectoriels: $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{P}$, $\mathbb{P}_n$, $\mathbb{P}_n$, $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$
		§4.3.2	Définition de **combinaison linéaire (CL)** des vecteurs d'un EV $\longrightarrow$Même définition que pour $\mathbb{R}^n$!
		[DÉF 4.15]	Définition de famille **liée** et **libre** dans un EV $\longrightarrow$Même définition que pour famille dans $\mathbb{R}^n$!
		[DÉF 4.20]	Définition de **sous-espace vectoriel (SEV)** d'un EV
		[PROP 4.22]	Un SEV est un EV avec la somme et multiplication restreintes
		[EXM 4.24]	$\mathbb{P}_n$ est un SEV de $\mathbb{P}$
		[DÉF 4.27]	Définition de **sous-espace vectoriel engendré** (ou **partie engendrée**) par une famille dans un EV $\longrightarrow$Même définition que pour famille dans $\mathbb{R}^n$!
		[DÉF 4.27]	(suite) Définition de **famille génératrice** dans un EV
		[LEM 4.28]	La partie engendrée par une famille dans un EV est un SEV
		[EXM 4.29*]**	Exemple de partie engendrée par une famille de 3 polynômes
	Cours 6	**[DEF 4.32]**	(Rappel) Définition d'**image** et d'**antécédent** d'un élément par une application, **image** $\mathrm{Img}(T)$ d'une application $T : V \to W$
		[DEF 4.33]	(Rappel) Définition d'application **surjective**, **injective** et **bijective**
		[LEM 4.34]	Une application est bijective ssi elle possède une application réciproque
		[DÉF 4.35]	Définition d'**application linéaire (AL)** entre EV
		[EXM 4.40*]**	Exemple d'une application linéaire de $\mathbb{P}$ dans $\mathbb{R}^2$ avec intégrales et dérivées
		[LEM 4.41]	Composition d'AL est une AL et la réciproque d'une AL bijective est une AL
		[DÉF 4.42]	Définition de **noyau** $\mathrm{Ker}(T)$ d'une AL $T : V \to W$
		[LEM 4.43]	Une application linéaire est injective ssi son noyau se réduit à zéro
		[PROP 4.45]	Le noyau et l'image d'une application linéaires sont des SEV
		[THM 4.46]	Conditions équivalentes pour l'injectivité d'une AL $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $\longrightarrow\boxed{T \text{ injective ssi FER de } [T] \text{ possède un pivot par colonne}}$
		[EXM 4.47]	Exemple de calcul de FER d'une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ pour déterminer si elle est injective ou non
		[THM 4.48]	Conditions équivalentes pour la surjectivité d'une AL $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $\longrightarrow\boxed{T \text{ surjective ssi FER de } [T] \text{ possède un pivot par ligne}}$
		[THM 4.52]	Conditions équivalentes pour la bijectivité d'une AL $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $\longrightarrow\boxed{T \text{ bijective ssi } T \text{ injective/surjective et } n = m}$
Chapitre 5 : Les opérations matricielles			
		[DÉF 5.1]	Définition de **produit matriciel** $\longrightarrow$ Le produit de matrices généralise le produit d'une matrice avec un vecteur colonne
		[EXM 5.2]	Exemple d'un produit de matrices

Sem.	Cours	Référence	Contenus
Semaine 4	Cours 7	**§5.2**	Lien entre produit matriciel et composition d'applications linéaires
		[DÉF 5.5]	Définition de **transposée** A^T d'une matrice A, matrice **symétrique** et **antisymétrique**
		[EXM 5.6]	Exemple de transposée d'une matrice
		[PROP 5.8]*	Propriétés de la transposition de matrices
		[PROP 5.9]*	Propriétés du produit de matrices (aussi avec la transposition)
		[DEF 5.11]	Définition de **commutation** de matrices carrées
		[EXM 5.10]	Exemple de deux matrices carrées de taille 2 qui ne commutent pas
		[DÉF 5.12]	Définition de **matrice identité** I_n de taille n
		[DÉF 5.13]	Définition de matrice carrée **inversible**
		[LEM 5.15]	Un application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ est bijective ssi $[T]$ est inversible
	Cours 8	**[PROP 5.19]***	Propriétés de l'inversion de matrices $\longrightarrow (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
		§5.5.3	Résolution du SEL carré donné par matrice inversible
		[THM 5.20]	Inversion de matrices carrées de taille 2 au moyen de leur **déterminant**
		[EXM 5.21]	Calcul de l'inverse d'une matrice carrée de taille 2
		[DÉF 5.23]	Définition de **matrice élémentaire**
		[EXM 5.24]	Exemples et non-exemples de matrice élémentaires
		[LEM 5.26]	Toute matrice élémentaire est inversible $\longrightarrow \boxed{\text{OEL} = \text{Multiplier par matrice élémentaire}}$
		[THM 5.27]*	Une matrice carrée est inversible ssi elle est un produit de matrices élémentaires
		[METH]	**Algorithme de Gauss-Jordan** pour déterminer si une matrice est inversible et calculer son inverse si elle existe
		[EXM 5.30]	Exemple de calcul d'inverse matrice carrée de taille 3
			Chapitre 6 : Le déterminant
Semaine 5	Cours 9	**§6.2.1**	Rappel de définition de déterminant des matrices carrées de taille 2
		[PROP 6.1]	Propriétés fondamentales du déterminant: bilinéarité, alternance et normalisation
		[LEM 6.3]	Unicité du déterminant à partir de bilinéarité, alternance et normalisation
		[THM 6.4]	Aire du parallélogramme formé par deux vecteurs = valeur absolue du déterminant de matrice associée
		[DÉF 6.5]	Définition de **sous-matrice principale** d'une matrice
		[EXM 6.6]	Exemples de sous-matrices principales
		[DÉF 6.7]	Définition récursive du **déterminant** $\det(A)$ d'une matrice carrée A
		[THM 6.8]	Calcul du déterminant en développant selon une ligne ou une colonne
		[EXM 6.10]	Exemple du calcul du déterminant d'une matrice carrée de taille 3
		[LEM 6.17]	$\det(A) = \det(A^T)$
		[PROP 6.18]	Propriétés du déterminant sous des OEL
		[EXM 6.19]	Exemple de calcul du déterminant à partir de ses propriétés
		[DÉF 6.19]	Définition de matrice **triangulaire supérieure**, **triangulaire inférieure** et **diagonale**
		[LEM 6.22]	Déterminant d'une matrice triangulaire = produit des coefficients sur la diagonale
		[EXM 6.25]	Exemple de calcul de déterminant avec toutes les propriétés
		[THM 6.27]	Volume d'un parallélépipède formé par trois vecteurs = valeur absolue du déterminant d'une matrice carrée associée

Sem.	Cours	Référence	Contenus
	Cours 10	**[THM 6.28]**	$\det(AB) = \det(A)\det(B)$
		[THM 6.29]	A inversible ssi $\det(A) \neq 0$
		§6.6.2	$\det(P^{-1}) = 1/\det(P)$ et $\det(P^{-1}AP) = \det(A)$
		[EXM 6.31]	Exemple de calcul d'inversibilité de matrice qui dépend d'un paramètre
		[DÉF 6.32]*	Définition de matrices **semblables** $A \sim B$
		[THM 6.34]	Si A et B sont semblables, alors $\det(A) = \det(B)$
		[THM 6.36]*	Conditions équivalentes pour l'inversibilité d'une matrice
		[PROP 6.37]*	A est inversible ssi A est inversible à gauche ssi A est inversible à droite
Chapitre 7 : Définitions abstraites II			
Semaine 6	Cours 11	**[DÉF 7.1]**	Définition de **base** d'un EV
		[EXM 7.3]	Exemple de base de $\mathbb{R}^2$
		[DÉF]	(informel) Définition de **base canonique** de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{P}_n$ et $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$
			$\longrightarrow$ Pas tous les EV ont une base canonique!
		[THM 7.6]	Extraction d'une base à partir d'une famille génératrice
		[LEM 7.8]	Si $\{v_1, \ldots, v_p\}$ est une base et $\#(\mathcal{F}) > p$, alors $\mathcal{F}$ est liée
		[THM 7.9]	Toutes les base ont la même quantité d'éléments
		[DÉF 7.10]	Définition de **dimension** d'un EV
		[EXM 7.12-13]	$\dim(\mathbb{R}^n) = n$ et $\dim(\mathbb{P}_n) = n + 1$
		[QUE]	$\dim(\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R}))$?
		[PROP 7.15]	Si $\dim(V) = n$ et $\{v_1, \ldots, v_n\}$ libre, alors $\{v_1, \ldots, v_n\}$ base
		[THM 7.16]*	Complétion d'une famille libre en une base
		[EXM 7.17]	Exemple de complétion d'une famille libre à 2 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$
		[THM 7.18]	Lien entre familles libres, génératrices et AL
			$\longrightarrow$ On pratique des preuves!
	Cours 12	**[THM 7.20]**	$\dim(\mathrm{Ker}(A))$ = nombre de variables libres du SEL $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$
		[METH]	Algorithme pour calculer une base de $\mathrm{Ker}(A)$
		[DÉF 7.23]	Définition de **colonne-pivot**
		[THM 7.25]	Les colonnes-pivot de A forment une base de $\mathrm{Img}(A)$
		[THM 7.32]*	Théorème du Rang pour AL: $\dim(\mathrm{Ker}(T)) + \dim(\mathrm{Img}(T)) = \dim(V)$ pour AL $T : V \to W$
		[THM 7.34]	Théorème du Rang pour matrices: $\dim(\mathrm{Ker}(A)) + \dim(\mathrm{Img}(A)) =$ quantité de colonnes de A
		[DÉF 7.35]	Définition du **rang** $\mathrm{rang}(A)$ d'une matrice A
		[EXM 7.33]	Exemple de vérification du Théorème du Rang pour matrice à 3 lignes et 5 colonnes
		[DÉF 7.39]	Définition d'**espace-ligne** $\mathrm{Lgn}(A)$ d'une matrice A
		[LEM 7.40]*	Si A et B sont ligne-équivalentes, alors $\mathrm{Lgn}(A) = \mathrm{Lgn}(B)$
		[COR 7.41]	Les lignes non-nulles de la FER de A forment une base de $\mathrm{Lgn}(A)$
		[PROP 7.42]	$\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A^T)$
Semaine de vacances 😊			
Chapitre 8 : Représentations en coordonnés et matricielles			
		[LEM 8.1]	Les coefficients d'une CL par rapport à une base sont uniques
		[DÉF 8.2]	Définition de **vecteurs de coordonnés** $[v]_{\mathcal{B}}$ relatives à une base $\mathcal{B}$

Sem.	Cours	Référence	Contenus
Semaine 7	Cours 13	**[EXM 8.6]**	Exemple de calcul de vecteur de coordonnés d'un vecteur relatifs à un base de $\mathbb{R}^2$
		[QUE]	Signification géométrique?
		[PROP 8.8]	Linéarité et inversibilité de l'application composantes
		[DÉF 8.9]	Définition de **matrice** $[T]_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}}$ d'une AL $T : V \to V'$ relative à deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$
		[THM 8.19]	$\boxed{[T(v)]_{\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}}}$
		[EXM 8.11]	Exemple de calcul de matrice d'une AL de $\mathbb{P}_3$ dans $\mathbb{P}_2$
		[PROP 8.13]	Propriétés fondamentales des matrices des AL
		[EXM]	Exemple de calcul du noyau d'une AL entre EV abstraits
		[EXM]	Exemple de détermination d'injectivité ou surjectivité d'un AL entre EV abstraits
		[EXM]	Exemple de détermination d'injectivité ou surjectivité d'un AL entre EV abstraits
	Cours 14	**[DÉF 8.15]**	Définition de **matrice de passage** $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ d'une base $\mathcal{B}$ vers une base $\mathcal{C}$
		[PROP 8.16]	Propriétés des matrices de passage $\longrightarrow$ $\boxed{[v]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}}$
		[EXM 8.17]	Exemple de calcul de matrice de passage dans $\mathbb{R}^2$
		[EXM 8.18]	Exemple de calcul de matrice de passage dans $\mathbb{R}^3$
		[THM 8.19]	Formule de changement de base $\longrightarrow$ $\boxed{[T]_{\mathcal{C}'\leftarrow\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C}'\leftarrow\mathcal{B}'}[T]_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}}P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}}$
		§8.5.2	Formule de changement de base (cas spécial) $\longrightarrow$ $\boxed{[T]_{\mathcal{B}} = P^{-1}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{C}}P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}}$
		[EXM 8.20⋆]	Exemple de matrice d'une AL de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ avec une base canonique
		[EXM 8.20]	Exemple de matrice d'une AL de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ avec deux bases non-canoniques
		[EXM]	Exemple de calcul de matrice d'une AL entre EV abstraits
		[EXM 8.21]	Exemple de calcul de matrice d'une réflexion dans le plan relative à une base non canonique
		[EXM]	Exemple de calcul de matrice d'une rotation dans le plan
Chapitre 9 : Valeurs et vecteurs propres			
Semaine 8	Cours 15	**[EXM]**	Exemples sur app pour parler de motivation de vecteur propres
		[DÉF 9.2-9.3]	Définition de **valeurs** et **vecteurs propres** d'une AL et d'une matrice
		[EXM 9.4]	Exemple des vecteurs sont propres pour une matrice carrée de taille 2
		[EXM]	Exemple de matrice sans vecteurs propres $\longrightarrow$ $\boxed{\text{matrice de rotation!}}$
		[MOT]	On peut avoir une famille libre de plusieurs vecteurs propres pour une même valeur propre
		[DÉF 9.9]	Définition d'**espace propres** E_λ d'une AL et d'une matrice
		[EXM 9.12]	Exemple de calcul d'epaces propres d'une matrice carrée de taille 3
		[LEM 9.14]	$E_\lambda = \mathrm{Ker}(A - \lambda\,\mathrm{I}_n)$
		[THM 9.15]	Une matrice A est inversible ssi toute valeur propre de A est non nulle
		[PROP 9.16]	λ valeur propre de A ssi $\det(A - \lambda\,\mathrm{I}_n) = 0$
		[DÉF 9.18]	Définition de **polynôme caractéristique** $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda\,\mathrm{I}_n)$ de A
		[EXM 9.19]	Exemple de calcul de valeurs propres d'une matrice carrée de taille 2
		§9.3.1	Définition de **spectre** d'une matrice A
		[EXM 9.22]	Exemple de calcul de valeurs propres d'une matrice carrée de taille 3
		[QUE]	Matrice sans vecteurs propres réels ?

Sem.	Cours	Référence	Contenus
	Cours 16	**[THM 9.23]**	Si $A \sim B$, alors $P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$
		[DÉF 9.24]	Définition de **multiplicité algébrique** $\mathrm{mult}_a(\lambda)$ d'une valeur propre λ
		[EXM 9.26]	Exemple de calcul de multiplicité algébrique d'une matrice carrée de taille 2
		[LEM]	Critère de Gauss pour les racines d'un polynôme unitaire à coefficients entiers
		[EXM]	Exemple de calcul de multiplicité algébrique d'une matrice carrée de taille 3
		[DÉF 9.28]	Définition de **multiplicité géométrique** $\mathrm{mult}_g(\lambda)$ d'une valeur propre λ
		[THM 9.30]	$\mathrm{mult}_g(\lambda) \leq \mathrm{mult}_a(\lambda)$ pour toute valeur propre λ
		[EXM 9.31]	Exemple de calcul de multiplicités géométriques et algébriques d'une matrice carrée de taille 3
		[EXM 9.32]	Exemple de calcul de multiplicités géométriques et algébriques d'une matrice carrée de taille 2
		[EXM]	Exemple de preuve avec valeurs et vecteurs propres
			Chapitre 10 : Diagonalisation
Semaine 9	Cours 17	**[DÉF 10.4]**	Définition de **matrice diagonalisable** $A = PDP^{-1}$
		[THM 10.6]	Vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes forment une famille libre
		[EXM 10.4]	Exemple des vecteurs propres d'une matrice carrée de taille 2
		[THM 10.8]	$A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable ssi elle possède une famille libre formée de n vecteurs propres $v_1, \ldots, v_n$ (avec valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$) $\longrightarrow \boxed{D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \text{ et } P = [v_1 \cdots v_n]}$
		[COR 10.11]	Si A possède n valeurs propres distinctes, alors A est diagonalisable
		[EXM 10.12]	Exemple de matrice carrée de taille 2×2 sans valeurs propres, donc non diagonalisable
		[EXM 10.13]	Exemple de matrice carrée de taille 2×2 avec une unique valeurs propre et non diagonalisable
		[EXM 10.15]	Exemple de matrice carrée de taille 3×3 avec trois valeurs propres différentes, donc diagonalisable
		[EXM 10.16]	Exemple de matrice carrée de taille 3×3 avec deux valeurs propres différentes et diagonalisable
		[THM 10.17]	A est diagonalisable ssi $\mathrm{mult}_a(\lambda) = \mathrm{mult}_g(\lambda)$ pour toute valeur propre λ
		[EXM 10.19]	Exemple de matrice carrée de taille 3×3 avec une unique valeur propre, de multiplicité géométrique 1, donc non diagonalisable
		[LEM 10.20]	Si $A = P\,\mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)P^{-1}$, alors $A^N = P\,\mathrm{diag}(d_1^N, \ldots, d_n^N)P^{-1}$
		[EXM 10.21]	Exemple de calcul de A^{1000} pour matrice diagonalisable A de taille 3×3
	Cours 18	**[MOT]**	Application: modèle d'évolution discrète de population et matrices de Leslie
		[EXM 10.22]	Exemple de calcul de puissances L^k pour matrice de Leslie L de taille 3×3
		[DÉF]	Définition de **vecteurs propres** et **valeurs propres complexes** et de **diagonalisation complexe** d'une matrice carrée

Sem.	Cours	Référence	Contenus
		[EXM 10.23]	Exemple de calcul de valeurs propres et vecteurs propres complexes et de diagonalisation complexe d'une matrice carrée de taille 3
Chapitre 11 : Produit scalaire et orthogonalité			
Semaine 10	Cours 19	[DÉF 11.1]	Définition de **norme euclidienne** $\|(x_1,\dots,x_n)\| = \sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$ $\rightarrow$ $\boxed{\text{norme} = \text{longueur !}}$
		[PROP 11.2]	Propriétés fondamentales de la norme euclidienne (positivité, homogeneité et inégalité triangulaire)
		[DÉF 11.3]	Définition de **vecteur unitaire** ou **normalisé**
		[DÉF 11.5]	Définition de **distance euclidienne** (ou **usuelle**) entre $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$
		[DÉF 11.6]	Définition de **produit scalaire euclidienne** (ou **usuel**) $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ entre $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$
		[PROP 11.8]	Propriétés fondamentales du produit scalaire euclidienne (symétrie, bilinéairité, positivité et inégalité de Cauchy-Schwarz) $\rightarrow$ $\boxed{\text{Lien entre norme et produit scalaire!}}$
		[DÉF 11.11]	Définition de **vecteurs orthogonaux** ou **perpendiculaires**
		[EXM 11.12]	Exemple de deux vecteurs orthogonaux dans $\mathbb{R}^5$
		[LEM 11.13]	Deux vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont orthogonaux ssi $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$ (identité pythagoricienne)
		[DÉF 11.14]	Définition de complément orthogonal $W^\perp$ d'un sous-espace vectoriel $W \subseteq \mathbb{R}^n$
		[PROP 11.17]	Propriétés du complément orthogonal
		[LEM 11.18]	Si $\{\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_k\}$ est base de $W \subseteq \mathbb{R}^n$, alors $\mathbf{v} \in W^\perp$ ssi $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}_1 = \cdots = \mathbf{v}\cdot\mathbf{w}_k = 0$
		§11.3.2	Si $\{\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_k\}$ base de $W \subseteq \mathbb{R}^n$, alors $W^\perp = \mathrm{Ker}([\mathbf{w}_1 \cdots \mathbf{w}_k])$
	Cours 20	[EXM 11.20]	Calcul de $W^\perp$ pour un sous-espace vectoriel W de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2
		[EXM 11.22]	Calcul de $W^\perp$ pour un sous-espace vectoriel W de $\mathbb{R}^4$ de dimension 2
		[DÉF 11.23]	Définition de **produit scalaire (abstrait)**, d'**espace préhilbertien** et d'**espace euclidien**
		[EXM 11.25]	Exemple produit scalaire sur $V = \mathbb{R}^2$
		[EXM 11.26]*	Exemple produit scalaire sur $V = \mathbb{P}_n$
		[EXM 11.27]*	Exemple produit scalaire sur $V = \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$
		[REM]	Les définitions de **norme**, **vecteurs orthogonaux** et **complément orthogonal** se généralisent aux espaces préhilbertiens
		[THM 11.30]	Si $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, alors $\mathrm{Lgn}(A)^\perp = \mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Col}(A)^\perp = \mathrm{Ker}(A^T)$
		[DÉF 11.31]	Définition de **famille orthogonale** et **famille orthonormée** (ou **orthonormale**) de vecteurs de $\mathbb{R}^n$
		[EXM 11.34]	Exemple de famille orthogonale mais pas orthonormée $\rightarrow$ $\boxed{\text{Normalisation d'une famille orthogonale sans vecteur nul!}}$
		[PROP 11.35]	Une famille orthogonale sans vecteur nul est libre
		[THM 11.36]	Écriture d'un vecteur comme CL d'une base orthogonale
		[EXM 11.38]	Exemple de calcul de coordonnés de vecteur relatives à une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$
		[DÉF 11.39]	Définition de **matrice orthogonale** $\rightarrow$ $\boxed{\text{pour } A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R}):\ A^TA = \mathrm{I}_n}$
		[LEM 11.40]	$[\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n] \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ orthogonale ssi $\{\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n\}$ famille orthonormée de $\mathbb{R}^m$
		[EXM 11.41]	Exemple de matrice orthogonale de taille 3×3

Sem.	Cours	Référence	Contenus
Semaine 11	Cours 21	[MOT]	Meilleure approximation d'un vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ avec des vecteurs d'une droite qui passe par l'origine
		[DÉF 11.43]	Définition de **projection orthogonale** $\mathrm{proj}_w(\mathbf{v})$ d'un vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ sur (la droite engendrée par) un vecteur $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$
		[EXM 11.47]	Exemple de motivation pour définir la projection orthogonale d'un vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ sur un plan qui passe par l'origine
		[THM 11.48]	Définition et existence de **projection orthogonale** $\mathrm{proj}_W(\mathbf{v})$ d'un vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ sur un sous-espace vectoriel $W \subseteq \mathbb{R}^n$ $\rightarrow \boxed{\mathrm{proj}_W(\mathbf{v}) = \text{meilleure approximation de } \mathbf{v} \text{ avec un vecteur de } W}$
		[PROP 11.49]	Expression de $\mathrm{proj}_W(\mathbf{v})$ étant donné une base orthogonale de W
		[EXM 11.50]	Calcul de $\mathrm{proj}_W(\mathbf{v})$ pour $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ et W engendré par deux vecteurs orthogonaux de $\mathbb{R}^3$
		[POR 11.51]*	Expression de $\mathrm{proj}_W(\mathbf{v})$ et de matrice canonique de proj_W étant donné une base orthonormée de W
		[EXM 11.53]	Calcul de matrice de proj_W pour W engendré par deux vecteurs orthogonaux de $\mathbb{R}^3$
	Cours 22	§11.9.2	**Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt**
		§11.9.2	**Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt**
		[EXM]	Exemple de calcul de base orthonormée d'un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$ avec le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt
		[EXM 11.62]	Exemple de calcul de base orthonormée d'un sous-espace vectoriel de dimension 3 de $\mathbb{R}^4$ avec le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt
		[PROP 11.63]*	Propriété d'unicité de la base orthonormée obtenue par le procédé de Gram-Schmidt
		[THM 11.64]*	Existence et unicité de la **décomposition QR** d'une matrice $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$
		§11.10.1*	Méthode de calcul de la décomposition QR pour une matrice $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$
		[THM 11.65]*	Existence et unicité de la **décomposition QR** d'une matrice $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ avec $\mathrm{rang}(A) = n$
		§11.10.2*	Méthode de calcul de la décomposition QR pour une matrice $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ avec $\mathrm{rang}(A) = n$
		[EXM 11.67]	Exemple de calcul de décomposition QR d'une matrice $A \in \mathbb{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$ avec $\mathrm{rang}(A) = 2$
Chapitre 12 : La méthode des moindres carrées			
	Cours 23	§12.1.2	Motivation:
		[DÉF 12.3]	Définition de **pseudo-solution** (ou **solution au sens des moindres carrés**) $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^n$ d'un SEL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ avec $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ et $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$
		[PROP 12.5]	$\hat{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^n$ est pseudo-solution de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ssi $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^n$ est solution de $A\mathbf{x} = \mathrm{proj}_{\mathrm{Img}(A)}(\mathbf{b})$
		[THM 12.6]	$\hat{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^n$ est pseudo-solution de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ssi $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^n$ est solution de l'**équation normale** $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$
		[EXM 12.7]	Exemple de calcul de pseudo-solution d'un SEL avec $A \in \mathbb{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$ et $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^3$
		[THM 12.9]	Unicité de pseudo-solution d'un SEL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ avec $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ et $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$

Sem.	Cours	Référence	Contenus
		§12.2.3	Définition de **droite de régression** pour une famille de points $\{(x_1, y_1), \ldots, (x_N, y_N)\}$ du plan
		[EXM 12.12]	Exemple de calcul de droite de régression pour 4 points du plan
		[THM 12.13]	$\hat{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^n$ est pseudo-solution de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ssi $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^n$ est solution de $R\mathbf{x} = Q^T\mathbf{b}$, où $A = QR$ est la décomposition QR
		[EXM 12.15]	Exemple de calcul de pseudo-solution d'un SEL avec $A \in \mathbb{M}_{3\times2}(\mathbb{R})$ et $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^3$ avec la décomposition QR
Chapitre 13 : Diagonalisation de matrices symétriques			
Semaine 12	Cours 24	**[DÉF 13.1]**	Rappel de définition de **matrice symétrique** (voir **[DÉF 5.5]**)
		[DÉF 13.3]	Rappel de définition de **matrice orthogonale** (voir **[DÉF 11.39]**)
		[REM 13.4]	Si A est matrice carrée, A orthogonale ssi $A^{-1} = A^T$
		[PROP 13.5]	$(B\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot (B^T\mathbf{w})$ pour $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ et $B \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ $\rightarrow$ $\boxed{\text{Si } A \text{ symétrique, } (A\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot (A\mathbf{w}) \text{ pour } \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n}$
		[COR 13.6]*	Si $G \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ est orthogonale, $(G\mathbf{v}) \cdot (G\mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ pour $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$
		[EXM 13.8]*	Exemple de matrice orthogonale de taille 2×2 donnée par une rotation dans le plan
		[LEM 13.9]	Vecteurs propres d'une matrice symétrique associés à des valeurs propres différentes sont orthogonaux
		[EXM 13.10]	Exemple de calcul des valeurs et vecteurs propres de matrice symétrique de taille 3×3
		[THM 13.11]	$A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ est symétrique ss'il existe une matrice $G \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ orthogonale telle que G^TAG est diagonale
		[REM 12.13]*	Cas de matrice $A \in \mathbb{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$ symétrique
		[DÉF 13.15]	Définition de **décomposition spectrale** (ou **diagonalisation au moyen de matrices orthogonales**) d'une matrice symétrique
		[EXM 13.17]	Exemple de calcul de décomposition spectrale d'une matrice symétrique de taille 2×2
		[EXM 13.18]	Exemple de calcul de décomposition spectrale d'une matrice symétrique de taille 3×3
Chapitre 14 : La décomposition en valeurs singulières			
Semaine 13	Cours 25	**§14.1.3**	Définition de **matrice définie par blocs**
		[EXM 14.4]	Exemple de matrice définie par blocs
		[THM 14.15]	Si $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ avec $m \leq n$, alors $P_{BA}(\lambda) = \lambda^{n-m}P_{AB}(\lambda)$
		[THM 14.6]	Définition et existence de **décomposition en valeurs singulières** de $A = U\Sigma V^T$ pour $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, avec $U \in \mathbb{M}_{m\times m}(\mathbb{R})$ et $V \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ orthogonales et $\Sigma \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ diagonale non-négative
		[THM 14.6]	Définition de **vecteurs singuliers à gauche** de A, **vecteurs singuliers à droite** de A et **valeurs singulières** de A
		[LEM 14.7]	$\mathrm{rang}(A^TA) = \mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A^T) = \mathrm{rang}(AA^T)$ et $\mathrm{Ker}(A^TA) = \mathrm{Ker}(A)$
		[PROP 14.9]	Si λ est valeur propre de A^TA, alors $\lambda \geq 0$
		[PROP 14.9]	Si $\lambda \neq 0$, λ est valeur propre de A^TA avec multiplicité m ssi λ est valeur propre de AA^T avec multiplicité m
		[POR 14.12]	$\mathrm{rang}(A) = \#\{$ valeurs singulières (strictement) positives de A $\}$
		§14.13	Méthode de calcul de décomposition en valeurs singulières $U\Sigma V^T$ de A

Sem.	Cours	Référence	Contenus
	Cours 26	**[EXM 14.15]**	Exemple de calcul de décomposition en valeurs singulières de matrice carrée de taille 2×2
		[REM]	Si $U\Sigma V^T$ est décomposition en valeurs singulières de A, alors $V\Sigma^T U^T$ est décomposition en valeurs singulières de A^T
		[EXM 14.17]	Exemple de calcul de décomposition en valeurs singulières de matrice de taille 3×2
		[EXM]	Exemple de calcul de décomposition en valeurs singulières de matrice de taille 3×2
Semaine 14	Cours 27		**Résolution d'exercices!**
	Cours 28		**Résolution d'exercices!**