

Série 9

Cette série fait suite aux chapitres 5.1, 5.2, 5.3 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay, aussi bien que certains concepts vus au cours.

Remarques : il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.

Exercice 1

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

- | | V | F |
|--|--------------------------|--------------------------|
| a) La matrice A n'est pas inversible si et seulement si 0 est une valeur propre de A . | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| b) Une matrice A carrée est inversible si et seulement si elle est diagonalisable. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| c) Les valeurs propres d'une matrice carrée sont sur sa diagonale. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| d) On trouve les valeurs propres de A en réduisant la matrice à sa forme échelonnée. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Exercice 2

Soit A une matrice de taille $n \times n$. Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses (justifier).

- | | V | F |
|---|--------------------------|--------------------------|
| a) A est diagonalisable si et seulement si elle possède n valeurs propres distinctes. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| b) A est diagonalisable si A possède n vecteurs propres. | | |
| c) Si A est diagonalisable, alors A est inversible. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| d) Si A est inversible, alors A est diagonalisable. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| e) Si 0 est valeur propre, alors $\text{rang}(A) < n$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| f) Pour toute matrice inversible P de taille $n \times n$, λ est une valeur propre de A si et seulement si λ est une valeur propre de $P^{-1}AP$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Exercice 3

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

- | | V | F |
|---|--------------------------|--------------------------|
| a) Un espace propre d'une matrice carrée A est l'espace nul d'une certaine matrice. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| b) Soit A une matrice carrée. Si A^2 est la matrice nulle, alors la seule valeur propre de A est 0. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

- c) Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont les éléments de sa diagonale principale. □ □
- d) L'ensemble $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ des vecteurs propres associés aux valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ d'une matrice carrée A est linéairement dépendant. □ □

Exercice 4

- a. Soit A une matrice de taille 3×3 inversible et λ une valeur propre de A .
- Alors λ^{-1} est une valeur propre de $-A$.
 - Alors λ est une valeur propre de $-A$.
 - Alors λ^{-1} est une valeur propre de A^{-1} .
 - Alors λ est une valeur propre de A^{-1} .
- b. Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$
- Alors seulement 6 est une valeur propre de A .
 - Alors -6 et -4 sont valeurs propres de A .
 - Alors 6 et 0 sont valeurs propres de A .
 - Alors -4 et 6 sont valeurs propres de A .
- c. Soit $\mathcal{B} = (1 - t, 1 + t, 1 + t + t^2)$ et $\mathcal{C} = (1, t - \frac{1}{2}, t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4})$.
- Alors \mathcal{B} est une base de \mathbb{P}_2 , mais pas \mathcal{C} .
 - Alors \mathcal{B} est une base de \mathbb{P}_2 , et \mathcal{C} aussi.
 - Alors \mathcal{C} est une base de \mathbb{P}_2 , mais pas \mathcal{B} .
 - Alors \mathcal{B} n'est pas une base de \mathbb{P}_2 , et \mathcal{C} non plus.
- d. Soit $\mathcal{B} = (1 - t, 1 + t, 1 + t + t^2)$ et $\mathcal{C} = (1, t - \frac{1}{2}, t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4})$. Soit encore S la matrice de changement de base de B à C et soit T la matrice de changement de base de C à B .
- Alors $s_{13} = 0$ et $t_{23} = 0$.
 - Alors $s_{13} = 9/16$ et $t_{23} = 3/2$.
 - Alors $s_{13} = -1$ et $t_{23} = -3/4$.
 - Alors $s_{13} = 3/2$ et $t_{23} = -9/8$.
- e. Soit A une matrice de taille 2×2 qui n'est pas inversible. Alors
- 0 est une valeur propre de A .
 - A est la matrice nulle.

- A n'a pas de valeur propre réelle.
- tout vecteur de \mathbb{R}^2 est un vecteur propre de A .

Exercice 5

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice de taille $n \times n$.

- a) On suppose que $a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{in} = \lambda$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Montrer que λ est une valeur propre de A . Quel est le vecteur propre associé?
- b) On suppose que $a_{1j} + a_{2j} + \dots + a_{nj} = \lambda$ pour tout $j = 1, \dots, n$. Montrer que λ est une valeur propre de A .

Exercice 6

Soit A une matrice de taille 2×2 et $\vec{x} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

- a) Montrer que le système $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ a une solution non nulle si et seulement si la matrice $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible.
- b) Dès maintenant $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $A\vec{x}$.
- c) Trouver pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ la matrice $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible.
- d) Montrer que les deux valeurs trouvées ci-dessus sont des valeurs propres de A .
- e) Calculer les espaces propres correspondants aux deux valeurs propres.

Exercice 7

On considère une séquence de nombres réels $n_0, n_1, n_2, n_3, \dots$ qui satisfont à la règle

$$n_{k+1} = \frac{1}{3}n_{k-1} + \frac{2}{3}n_k$$

pour $k = 1, 2, 3, \dots$. Si $n_0 = -3$ et $n_1 = 1$, que vaut n_k pour tout k ? (Essayez de donner une formule explicite.) Comment se comporte la séquence quand k devient grand? Plus précisément, est-ce que les nombres n_k deviennent très grands ou très petits ou autre? Question plus large : que se passe-t-il si on change les conditions initiales (c'est-à-dire, n_0 et n_1)?

Exercice 8

Rappels de nombres complexes. Le conjugué d'un nombre complexe $z = a + ib$ s'écrit \bar{z} et est défini comme étant $\bar{z} = a - ib$.

Montrer que pour $z, w \in \mathbb{C}$ on a

- a) $\bar{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$,
- b) $zw = wz$,
- c) $\overline{w+z} = \bar{w} + \bar{z}$,
- d) $\overline{wz} = \bar{w} \cdot \bar{z}$,
- e) $r\bar{z} = \bar{rz}$ si $r \in \mathbb{R}$,
- f) $|wz| = |w| \cdot |z|$,
- g) $|w+z| \leq |w| + |z|$.

Exercice 9

Conseil : pour calculer $\frac{1}{z}$ où z est complexe, démarrez avec $\frac{1}{z} = \frac{1}{z} \frac{\bar{z}}{\bar{z}}$.

- a) Calculer \bar{i} , $\bar{i^2}$, $(\bar{i})^2$, $\frac{1}{\bar{i}}$ (aussi noté i^{-1}).
- b) Soit $z \in \mathbb{C}$. Décrire géométriquement le produit iz .
- c) Soit $w = 1 + i$ et $z = 2 + 3i$. Calculer w/z (à mettre sous la forme $a + bi$).

Exercice 10

Calculer pour les matrices suivantes les valeurs propres et une base de chaque espace propre dans \mathbb{C}^2

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Copyright © Prof(s). de la section de mathématiques EPFL (Assyr Abdulle, Jérôme Scherer, ...). Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre: D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications*. De Boeck, Bruxelles, 2005.