Série 8

Cette série fait suite aux chapitres 4.6, 4.7, 5.1, 5.2 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay, aussi bien que certains concepts vus au cours.

Remarques : il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -15 & 1 & -9 \\ 0 & 6 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Est-ce que $\lambda = 6$ est une valeur propre de A ?
b) Même question avec $\lambda = 1$ et $\lambda = -9$.

Exercice 2

Le *polynôme caractéristique* d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est la fonction $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$. Comme vous le constaterez, c'est en effet toujours un polynôme de degré n. Les valeurs propres de A sont exactement les racines de p_A.

Soient
$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$,
et $E = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 17 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculer le polynôme caractéristique, les valeurs propres et les vecteurs propres de chacune de ces matrices A, B, C, D, E.

Exercice 3

Soit A une matrice de taille $n \times n$ et $k \geqslant 2$ un entier. Montrer que si λ est une valeur propre de A avec pour vecteur propre $\overrightarrow{v}$, alors λ^k est une valeur propre de

$$A^k = \underbrace{A\,A\,\cdots\,A}_{k \text{ fois}}$$

avec pour vecteur propre $\overrightarrow{v}$.

Exercice 4

a) Montrer que si λ est une valeur propre d'une matrice inversible A de taille $n \times n$, alors λ^{-1} est une valeur propre de A^{-1}. Trouver un vecteur propre correspondant.
b) Montrer que A et A^T ont les mêmes valeurs propres. Montrer par un contre-exemple que les vecteurs propres de A et A^T ne sont pas les mêmes en général.

Exercice 5

a) Est-ce que $\lambda = 4$ est une valeur propre de la matrice : $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$? Si oui, trouver un vecteur propre pour cette valeur propre.
b) Est-ce que $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 9 \\ -4 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$?
c) Trouver une base de l'espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 3$ de la matrice $M = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix}$. Quelle est la dimension de cet espace propre ?

Exercice 6

Déterminer lesquelles, parmi les matrices suivantes, sont diagonalisables :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7

Soit A la matrice 2×2 réelle donnée par

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Montrer que $\lambda = a \pm ib$ sont les valeurs propres de A.

Exercice 8

Soit A une matrice $n \times n$ réelle ou complexe et $x \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que μx est encore un vecteur propre de A pour tout $\mu \in \mathbb{C}$, $\mu \neq 0$. Si vous préférez, vous pouvez faire cet exercice en considérant A, x, λ et μ réels.

Exercice 9

Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que 0 et 6 sont des valeurs propres de A et calculer les espaces propres associés.

Exercice 10

Existe t-il une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $b \neq 0$, diagonalisable et ne possédant qu'une seule valeur propre de multiplicité 2 ?
