

Série 7

Cette série fait suite aux chapitres 4.3, 4.4, 4.5 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay.

Remarques : il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.

Exercice 1

- a) Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel W de \mathbb{R}^2 donné par $W = \text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ où $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- b) Trouver un sous-ensemble B de $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ tel que B soit une base de W .
- c) Agrandir l'ensemble $\{\vec{v}_1 + \vec{v}_2\} \subset W$ pour obtenir une base de W .

Exercice 2

Trouver la dimension du sous-espace H défini par :

$$H = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \vec{x} = \begin{pmatrix} a - 3b + 6c \\ 5a + 4d \\ b - 2c - d \\ 5d \end{pmatrix}, \text{ où } a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

Exercice 3

On considère la transformation $T : \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{P}_2$ définie par

$$T(a + bt + ct^2 + dt^3) = (a + b + c + d) + (a + b)t + (c + d)t^2.$$

- a) Vérifier que T est linéaire.
- b) Trouver la dimension et une base de $\text{Im}T$.
- c) Vérifier que le polynôme $7 + 5t + 2t^2$ est bien dans l'image de T et donner ses coordonnées dans la base trouvée en (b).
- d) Trouver la dimension et une base de $\text{Ker}T$.
- e) Vérifier que le polynôme $2 - 2t - 5t^2 + 5t^3$ est bien dans le noyau de T et donner ses coordonnées dans la base trouvée en (d).

Exercice 4

Soit $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices 2×2 à coefficients réels.

1. Soit $V = \{M \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid M \text{ soit inversible}\}$. Alors
 - V est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{2 \times 2}$
 - V est un espace vectoriel.
 - V n'est pas un espace vectoriel.
 - V est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des matrices inversibles.
2. Soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Alors

$$\square [M]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \square [M]_E = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\square [M]_E = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \square [M]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3. Quelle famille ci-dessous est une base de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

$$\square \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\square \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\square \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\square \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Exercice 5

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

- | | V | F |
|---|--------------------------|--------------------------|
| a) Le plan défini dans \mathbb{R}^3 par $z = 2$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 . | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| b) $\text{Ker}(A) = \{\vec{0}\}$ si et seulement si l'application $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ est surjective. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| c) Soit V un espace vectoriel et $u \in V$. Alors l'opposé $-u$ de u est unique et $-u = (-1)u \in V$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| d) Soit A une matrice de taille $m \times n$, alors $\text{Ker}(A)$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n . | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Exercice 6

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 9 & -7 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 5 & -6 & 10 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Montrer que les matrices A et B sont équivalentes (selon les lignes). (**Indication** : quelle est la forme échelonnée et réduite des deux matrices?)
- b) Calculer le rang de A et $\dim(\text{Ker}A)$.
- c) Trouver une base pour chacun des sous-espaces $\text{Im}A$, $\text{Ker}A$ et $\text{Ker}A^T$, ainsi que du sous-espace $\text{Lgn}(A)$ engendré par les lignes de A .

Exercice 7

On considère la transformation $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$T(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(0) \end{pmatrix}$$

- a) Vérifier que T est linéaire.
- b) Trouver la dimension et une base de $\text{Im}T$.
- c) Appliquer le Théorème du rang pour trouver la dimension du noyau de T .
- d) Vérifier le résultat de c) en trouvant une base de $\text{Ker}T$.

Exercice 8

- a) Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -19 \\ 0 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$ sont équivalentes.
- b) Calculer $\text{rang}(A)$, $\dim(\text{Ker}A)$, $\text{rang}(B)$, $\dim(\text{Ker}B)$.
- c) Trouver une base de $\text{Ker}A$ et $\text{Ker}B$.

Exercice 9

Soit $\vec{T} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire donnée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x_1 + x_3 \\ 2x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

Soient E la base canonique de \mathbb{R}^3 et B une base de \mathbb{R}^3 donnée par

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

- a) Donner la matrice M qui représente T par rapport aux bases E (de départ) et B (d'arrivée).
- b) Même question pour les bases B (de départ) et E (d'arrivée).
- c) Même question pour les bases B (de départ) et B (d'arrivée).

Exercice 10

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

- Déterminer le rang de A et la dimension du noyau de A .
- Même question pour A^T .
- On suppose qu'une matrice A de taille 7×7 possède un pivot dans chaque ligne. Quel est le rang de A ? Quelle est la dimension du noyau de A ?
- On considère une matrice A de taille $m \times n$ et un vecteur $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$. Quelle doit être la relation entre le rang de $[A \ \vec{b}]$ et le rang de A pour que l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ soit compatible?

Exercice 11

- Soit A une matrice 5×6 . Si $\dim(\text{Ker}A) = 3$, quel est le rang de A ?
- Soit A une matrice 7×3 . Quel est le rang maximum de A ? Quelle est la dimension minimum de $\text{Ker}A$? Même question si A est une matrice 3×7 .
- Soit A une matrice $n \times n$. Donner une condition sur $\text{rang}(A)$ pour que A^T soit inversible.
- Soit $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une transformation linéaire telle que $T \circ T \circ T = I_3$ (l'application identité). Quelle est la dimension de $\text{Ker}T$?

Exercice 12

Soient $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ et $C = \{\vec{c}_1, \vec{c}_2\}$ deux bases de \mathbb{R}^2 . On suppose $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- Donner la matrice de changement de base (matrice de passage) de la base C vers la base B .
- Donner la matrice de changement de base (matrice de passage) de la base B vers la base C .
- Si $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ est tel que $[\vec{v}]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, calculer $[\vec{v}]_C$.
- À présent, si $[\vec{v}]_C = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}$, calculer $[\vec{v}]_B$.

Copyright © Prof(s). de la section de mathématiques EPFL (Assyr Abdulle, Orane Pouchon, Jérôme Scherer, ...). Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre: D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications*. De Boeck, Bruxelles, 2005.