Série 6

Remarques : il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver une base de $\mathrm{Ker}(A)$ et de $\mathrm{Im}(A)$.

Exercice 2

Soit $\mathbb{P}_2$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 2. Parmi les quatre sous-ensembles de $\mathbb{P}_2$ ci-dessous, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{P}_2$

$$\begin{aligned}
E_1 &= \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, a_0 = a_2^2\} \\
E_2 &= \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, p(0) = 1\} \\
E_3 &= \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, p'(t) = 0\} \\
E_4 &= \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, a_0 = a_1 = a_2\}
\end{aligned}$$

Exercice 3

Soit $\mathbb{P}_2$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2, dont on admet que c'est un espace vectoriel. On considère la transformation $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $T(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(0) \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que T est linéaire.
b) Trouver une base de $\mathrm{Ker}\, T$.
c) Trouver une base de $\mathrm{Im}\, T$.

Exercice 4

Soient V et W deux espaces vectoriels, T une transformation linéaire : $T : V \to W$ et $\{v_1, \ldots, v_p\}$ un sous-ensemble de V.

a) Montrer que si l'ensemble $\{v_1, \ldots, v_p\}$ est linéairement dépendant alors l'ensemble $\{T(v_1), \ldots, T(v_p)\}$ est linéairement dépendant.

b) Supposons que la transformation T est injective, c'est-à-dire que $T(u) = T(v) \Rightarrow u = v$. Montrer que si l'ensemble $\{v_1, \ldots, v_p\}$ est linéairement indépendant alors l'ensemble $\{T(v_1), \ldots, T(v_p)\}$ est linéairement indépendant.

Exercice 5

Répondre aux questions ci-dessous pour chacune des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 8 & -4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ -6 & 2 & 4 \\ 9 & -7 & -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ -6 & 3 & 0 & -7 \\ 4 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Les colonnes sont-elles linéairement indépendantes ou linéairement dépendantes ?
2. Les colonnes engendrent-elles $\mathbb{R}^3$?

Exercice 6

Vous pouvez ignorer la partie (c).

a) Soit W l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ vérifiant l'équation $x - y + z = 0$. Trouver une application linéaire $\psi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dont W est le noyau, puis donner une base de ce sous-espace.

b) Soit U le sous-ensemble des polynômes p de $\mathbb{P}_2$ vérifiant $p(1) = 0$. Trouver une application linéaire $\varphi\colon \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}$ dont U est le noyau, puis donner une base de ce sous-espace.

c) Construire un isomorphisme $F\colon U \to W$. On pourra utiliser la notion de coordonnées pour comparer U avec $\mathbb{R}^2$, puis $\mathbb{R}^2$ avec W.

Exercice 7

On se donne une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad \text{et} \quad [x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

où $[x]_{\mathcal{B}}$ désigne le vecteur des coordonnées du vecteur x dans cette base. Trouver le vecteur $\overrightarrow{x}$ (c'est-à-dire ses coordonnées dans la base standard). Trouver les coordonnées $[y]_{\mathcal{B}}$ du vecteur

$$\overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} 10 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8

a) On considère le vecteur $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ exprimé dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Trouver les coordonnées de $\overrightarrow{v}$ dans la base $(\overrightarrow{b}_1, \overrightarrow{b}_2)$ de $\mathbb{R}^2$, où $\overrightarrow{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Même question pour $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ donné dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à exprimer dans la base $(\overrightarrow{b}_1, \overrightarrow{b}_2, \overrightarrow{b}_3)$ donnée par $\overrightarrow{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 9

Soit $B = (1 - 3t^2, 2 + t - 5t^2, 1 + 2t)$.

a) Vérifier que B est une base de $\mathbb{P}_2$, l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

b) Déterminer la matrice de passage de la base B vers la base canonique $\{t \mapsto 1, t \mapsto t, t \mapsto t^2\}$.

c) Écrire $t \mapsto t^2$ comme combinaison linéaire des vecteurs de B.

Exercice 10

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble formé des quatre premiers polynômes de Hermite :

$$\mathcal{F} = (1, 2t, -2 + 4t^2, -12t + 8t^3).$$

a) Montrer que $\mathcal{F}$ forme une base de $\mathbb{P}_3$.

b) Quelles sont les coordonnées $[y(t)]_{\mathcal{F}}$ du polynôme $y(t) = 7 - 12t - 8t^2 + 12t^3$?

Remarque. Les polynômes de Hermite sont utiles lors de l'étude d'équations différentielles que l'on rencontre dans des problèmes de physique. Ils se construisent facilement à l'aide de relations de récurrence.

Exercice 11

Soit W le sous-espace vectoriel de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ des matrices symétriques ($A = A^T$). On considère les matrices suivantes de W :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Utiliser la méthode de Gauss pour extraire de $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ une base de W.