

## Série 5

Cette série fait suite aux chapitres 2.2, 2.3, 3.1, 3.2 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay.

**Remarques :** il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.

### Exercice 1

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

- |   | V                        | F                        |
|---|--------------------------|--------------------------|
| a) Soient $A$ , $B$ et $C$ trois matrices. Alors $(AB)C = (AC)B$ .  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| b) Si $A$ est une matrice inversible, alors $A^{-1}$ l'est aussi.   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| c) Le produit de plusieurs matrices inversibles de taille $n \times n$ n'est pas inversible.  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| d) Si $A$ est une matrice inversible de taille $n \times n$ , alors l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ est compatible quel que soit $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ . | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

### Exercice 2

Considérer la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

- Utiliser la méthode de Gauss-Jordan vue au cours pour inverser  $A$ , en la transformant en  $I_2$  à l'aide d'une suite d'opérations élémentaires.
- Utiliser les matrices associées aux opérations élémentaires du point précédent pour exprimer  $A$  sous la forme d'un produit de matrices élémentaires. Qu'observez-vous ?

### Exercice 3

Soient  $A$  et  $B$  des matrices de taille  $n \times n$ . Montrer que si  $A$  ou  $B$  est non inversible, alors  $AB$  est non inversible.

### Exercice 4

Calculer le déterminant des matrices élémentaires suivantes. Indiquer à quelle opération

élémentaire chaque matrice correspond.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

### Exercice 5

Soit  $A$  une matrice  $n \times n$ . Montrer que si deux lignes de  $A$  sont identiques, alors  $\det(A) = 0$ .  
Que peut-on dire si deux colonnes sont identiques ?

### Exercice 6

Montrer :

- Si  $A$  est une matrice inversible, alors  $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$ .
- Si  $A$  et  $Q$  sont des matrices inversibles de taille  $n \times n$ , alors  $\det(QAQ^{-1}) = \det A$ .
- Si  $U$  est une matrice carrée de taille  $n \times n$  telle que  $U^T U = I_n$ , alors  $\det U = \pm 1$ .
- Si  $A$  est une matrice carrée telle que  $\det A^3 = 0$ , alors  $A$  est non inversible.

### Exercice 7

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

- |   | V                        | F                        |
|---|--------------------------|--------------------------|
| a) Si deux lignes d'une matrice $A$ de taille $7 \times 7$ sont les mêmes, alors $\det A = 0$ .                               | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| b) Si $A$ est une matrice carrée dont le déterminant vaut 2, alors $\det(A^3) = 6$ .  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| c) Si $A$ et $B$ sont des matrices de taille $n \times n$ telles que $\det A = 2$ et $\det B = 5$ , alors $\det(A + B) = 7$ . | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| d) Si $A$ est une matrice carrée triangulaire inférieure, alors $A$ est inversible.   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

### Exercice 8

- Les matrices sont de taille  $n \times n$ .
  - Soient  $A, B$  deux matrices telles que  $A$  ou  $B$  n'est pas inversible. Alors  $AB$  n'est pas inversible.
  - Il existe une matrice  $A$  inversible et une matrice  $B$  qui ne l'est pas telles que  $AB$  est inversible.
  - Soient  $A, B$  deux matrices inversibles, alors  $A + B$  est inversible.
  - Soient  $A, B$  deux matrices inversibles, alors  $AB$  est inversible et  $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ .
- Soit  $A$  une matrice  $m \times n$  et  $B$  une matrice  $n \times p$ .

- Alors  $(AB)^T = A^T B^T$ .
  - Alors  $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$  si  $A$  est inversible.
  - Si  $m = n$  et  $A = A^T$ , alors  $A$  est diagonale.
  - Si  $m = n = p$ ,  $A = A^T$  et  $B = B^T$ , alors  $(AB)^T = AB$ .
- c)
- Une matrice  $C$  de taille  $2 \times 2$  vérifie  $AC = CA$  pour toute matrice  $A$  de taille  $2 \times 2$  si et seulement  $C$  est diagonale.
  - Une matrice  $C$  de taille  $2 \times 2$  vérifie  $AC = CA$  pour toute matrice  $A$  de taille  $2 \times 2$  si et seulement  $C$  est scalaire, i.e.  $C = \lambda I$ , où  $I$  est la matrice identité et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
  - Soient  $A, C$  deux matrices  $2 \times 2$  telles que  $AC = CA$ . Alors  $A$  est diagonale ou  $C$  est diagonale.
  - Soient  $A, C$  deux matrices  $2 \times 2$  telles que  $AC = CA$ . Alors  $A$  est scalaire ou  $C$  est scalaire.
- d) Soit  $A$  une matrice de taille  $7 \times 8$  et  $T$  l'application linéaire définie par  $T\vec{x} = A \cdot \vec{x}$ . Alors  $\vec{x}$  est un vecteur de
- $\mathbb{R}^7$
  - $\mathbb{R}^8$
  - $\mathbb{R}^{15}$
  - $\mathbb{R}^{56}$
- e) Soit  $A$  une matrice  $m \times n$  et  $B$  une matrice  $n \times p$ .
- Alors  $BA$  est une matrice  $n \times n$ .
  - Alors  $A^T$  est une matrice  $m \times n$ .
  - Alors  $A$  représente une application linéaire  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ .
  - Alors  $(AB)^T$  est une matrice  $p \times m$ .
- f) Soient  $A, B, C$  trois matrices  $n \times n$ .
- Si  $AC = BC$ , alors  $A = B$ .
  - Si  $A$  est inversible et  $AC = BC$ , alors  $A = B$ .
  - Si  $C = C^{-1}$  et  $AC = BC$ , alors  $A = B$ .
  - Si  $C = C^T$  et  $AC = BC$ , alors  $A = B$ .
- g) Soit  $A$  une matrice carrée et  $a$  un nombre réel. Alors
- $A + I$  est inversible.
  - $(A - I)(A + I) = A^2 - I$ .
  - $(A + I)(A + I) = A^2 + I$ .
  - $(aA)^2 = a(A^2)$ .

### Exercice 9

Soient  $p_1(t) = 1 - t$ ,  $p_2(t) = t^3$ ,  $p_3(t) = t^2 - t + 1$ . Est-ce que le polynôme  $q(t) = t^3 - 2t + 1$  est dans le  $\text{span}\{p_1(t), p_2(t), p_3(t)\}$  ?

### Exercice 10

Soient  $V$  et  $W$  deux espaces vectoriels, et  $T : V \rightarrow W$  une transformation linéaire. Montrer que si  $U \subset V$  est un sous-espace vectoriel, alors l'ensemble image  $T(U)$  est un sous-espace vectoriel de  $W$ .

### Exercice 11

On rappelle que  $\mathbb{P}_3$  est l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

- a) Les vecteurs de  $\mathbb{P}_3$  suivants sont-ils linéairement indépendants ?
  - (i)  $p_1, p_2, p_3$  tels que  $p_1(t) = 1 - t^2$ ,  $p_2(t) = t^2$ ,  $p_3(t) = t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .
  - (ii)  $p_1, p_2, p_3$  tels que  $p_1(t) = 1 + t + t^2$ ,  $p_2(t) = t + t^2$ ,  $p_3(t) = t^2$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .
- b) Les vecteurs  $p_1, p_2, p_3$  de (ii) forment-ils une base de  $\mathbb{P}_3$  ?

### Exercice 12

On rappelle qu'une base d'un espace vectoriel est un système de générateurs linéairement indépendants. Vous pouvez ignorer la partie (c).

- a) Prouver que les vecteurs  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  forment une base de  $\mathbb{R}^3$ .
- b) Démontrer que l'ensemble  $\mathcal{F} = \{1 + t^2, t + t^2, 1 + 2t + t^2\}$  est une base de  $\mathbb{P}_2$ , l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré 2.
- c) Soit  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  l'espace vectoriel des fonctions réelles. Montrer que les fonctions  $\sin^2 t$  et  $\cos^2 t$  sont linéairement indépendantes. Forment-elles une base de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  ?
- d) Soit  $M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel des matrices de taille  $2 \times 3$ . Montrer que les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sont linéairement indépendantes. Comment faire pour compléter cette famille de quatre matrices en une base de  $M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$  ?

---

Copyright © Prof(s). de la section de mathématiques EPFL (Assyr Abdulle, Orane Pouchon, Jérôme Scherer, ...). Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre: D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications*. De Boeck, Bruxelles, 2005.