

Série 4

Cette série fait suite aux chapitres 1.9, 2.1, 2.2 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay.

Remarques : il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.

Exercice 1

a) Calculer la matrice associée à l'application linéaire $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par

$$T(x, y, z) = (x + 3y - 2z, 3x + 4y + 2z, 4x + 7y)$$

b) Déterminer si l'application linéaire T est injective, surjective ou bijective.

c) Déterminer ensuite tous les vecteurs (x, y, z) tels que $T(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

Exercice 2

a) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Trouver (si elle existe) une matrice B de taille 2×2 non nulle telle que $AB = 0$. (*Idée : écrire AB sous la forme $(A \vec{b}_1 \quad A \vec{b}_2)$*)

b) Même question pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

c) Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & k \end{pmatrix}$. Pour quelle(s) valeur(s) de $k \in \mathbb{R}$ a-t-on $AB = BA$?

d) Trouver une matrice A non nulle telle que $A^2 = 0$.

Exercice 3

Soient $T_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$, et $T_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto x_1 + x_2 + x_3$.

a) Écrire les matrices canoniques associées à T_1 et T_2 et le produit matriciel associé à la composition $T_2 \circ T_1$ telle que $T_2 \circ T_1(\vec{x}) = T_2(T_1(\vec{x}))$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$.

b) Quel est le domaine de définition de $T_2 \circ T_1$? Quel est le domaine d'arrivée?

Exercice 4

a) Calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

(i) en utilisant la formule générale de l'inverse d'une matrice 2×2 ;

(ii) en mettant la matrice $(A \ I_2)$ sous forme échelonnée réduite.

b) Calculer l'inverse de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ en mettant la matrice $(B \ I_3)$

sous forme échelonnée réduite.

Exercice 5

Soient A et B des matrices telles que le produit AB soit bien défini. Montrer que $(AB)^T = B^T A^T$.

Exercice 6

Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles (essayer d'utiliser le moins de calculs possible, justifier votre réponse).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 7 & 14 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -6 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 8 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -7 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 18 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 17 \end{pmatrix},$$
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7

Soient A une matrice $m \times n$ et B, C des matrices de tailles appropriées. Montrer les égalités suivantes :

a) $A(B + C) = AB + AC$

b) $r(AB) = (rA)B = A(rB), \forall r \in \mathbb{R}$

c) $A = AI_n = I_m A$.

Précisez les dimensions des matrices B et C .

Exercice 8

Montrez que les colonnes d'une matrice A inversible de taille $n \times n$.

a) engendrent \mathbb{R}^n ;

b) sont linéairement indépendantes.

Exercice 9

Soit

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer C^2 et montrer que C^3 est la matrice nulle. On dit que C est *nilpotente*.
2. Montrer sans faire de calculs explicites que $I_3 + C + C^2$ est l'inverse de la matrice $(I_3 - C)$.
3. Trouver l'inverse (explicite cette fois!) de la matrice $I - C$.
4. Soit $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Trouver les solutions de l'équation $\vec{x} = C\vec{x} + \vec{b}$ en échelonnant la matrice augmentée $(I - C \mid \vec{b})$.
5. Résoudre la même équation que ci-dessus en utilisant la formule $\vec{x} = (I - C)^{-1}\vec{b}$.

Exercice 10

Calculer les produits matriciels suivants :

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (1 \ 2 \ 3); \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \ 2); \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} (1 \ 3 \ 5).$$

En déduire le théorème suivant : Si A est une matrice $m \times n$ et B une matrice $n \times p$, alors le produit AB peut être obtenu par la formule colonne-ligne suivante :

$$AB = \text{col}_1(A)\text{lig}_1(B) + \cdots + \text{col}_n(A)\text{lig}_n(B), \quad (1)$$

où $\text{col}_k(A)$ est la matrice $m \times 1$ correspondant à la $k^{\text{ème}}$ colonne de la matrice A , et $\text{lig}_k(B)$ est la matrice $1 \times p$ correspondant à la $k^{\text{ème}}$ ligne de la matrice B .

Souvenez-vous de cette propriété du produit matriciel : on l'a utilisée en conjonction avec le théorème spectral et avec le théorème de la décomposition en valeurs singulières pour écrire une matrice A comme une somme de plusieurs matrices simples : $A = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{v}_i \vec{v}_i^T$ (pour une matrice symétrique) et $A = \sum_{i=1}^{\min(m,n)} \sigma_i \vec{u}_i \vec{v}_i^T$ (pour une matrice quelconque). Faites explicitement le lien avec cet exercice.

Exercice 11

a) Calculer le déterminant des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Même question pour A^T, B^T, C^T, D^T, E^T .

Exercice 12

Calculer, en faisant le moins de calculs possible, les déterminants des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13

a) Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

b) Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} a & b & a \\ b & a & b \\ a+b & a+b & a+b \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ a & a+b & c \\ a & b & a \end{vmatrix}.$$

c) Calculer le déterminant de la matrice suivante. Comment le déterminant dépend-t-il de l'angle φ ? Pourquoi?

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

d) Soient $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 18 & 17 & 23 \\ 49 & 1 & 72 & 10 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 18 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 18 \end{pmatrix}$. Calculer $\det(AB)$.

Exercice 14

Calculer le déterminant de la matrice ci-dessous, en la transformant progressivement à l'aide de transformations élémentaires.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & 7 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Copyright © Prof(s). de la section de mathématiques EPFL (Assyr Abdulle, Orane Pouchon, Jérôme Scherer, José Luis Zuleta, . . .). Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre: D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications*. De Boeck, Bruxelles, 2005.