

Série 3

Cette série fait suite aux chapitres 1.5, 1.7, 1.8, 1.9 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay.

Remarques : il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.

Exercice 1

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 8 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ecrire l'ensemble solution de l'équation $A\vec{x} = \vec{0}$ sous forme paramétrique vectorielle.

Exercice 2

Déterminer lesquelles des applications suivantes sont linéaires et donner la matrice associée lorsque cela est possible :

- a) $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \sin x$
- b) $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $x \mapsto (x, x^2)$
- c) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \mapsto (x + y, 2x - 3y)$
- d) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y, z) \mapsto (2x - z, x + y)$
- e) $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y, z, u) \mapsto (2x + u, y - z + 1)$

Exercice 3

Décrire quelle est la forme échelonnée réduite dans les cas suivants :

- a) A est une matrice 3×3 avec des colonnes linéairement indépendantes.
- b) A est une matrice 4×2 , $A = (\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2)$ et \vec{a}_2 n'est pas un multiple de \vec{a}_1 .
- c) A est une matrice 4×3 , $A = (\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \vec{a}_3)$. Les vecteurs \vec{a}_1 et \vec{a}_2 sont linéairement indépendants, et \vec{a}_3 n'est pas une combinaison linéaire de \vec{a}_1 et \vec{a}_2 .

Exercice 4

L'assertion suivante est-elle correcte (justifier) ?

Tout ensemble de vecteurs $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$ de \mathbb{R}^n est linéairement dépendant si $p > n$.

Exercice 5

Trouver les matrices correspondant aux transformations linéaires suivantes (exprimées dans la base canonique) :

a) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

Exercice 6

Décrire géométriquement la transformation linéaire suivante : $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par

$$T(\vec{u}) = A\vec{u} \quad \text{où } A = \begin{pmatrix} \cos \Theta & -\sin \Theta \\ \sin \Theta & \cos \Theta \end{pmatrix}.$$

Indication : Calculer les images de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ par T .

Exercice 7

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

- a) Deux vecteurs sont linéairement dépendants si et seulement s'ils se trouvent sur une même droite qui passe par l'origine.
- b) Si un ensemble comporte moins de vecteurs que le nombre de composantes de ceux-ci, alors il est linéairement indépendant.
- c) Une équation homogène est toujours compatible.
- d) Si \vec{x} est une solution non triviale de $A\vec{x} = \vec{0}$, alors aucune composante de \vec{x} est nulle.

Vrai-Faux

Exercice 8

Dans les cas suivants, écrire la matrice canonique correspondant à la transformation, et déterminer si la transformation est injective, surjective ou bijective.

$$\text{a) } T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4x_1 + 3x_2 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto x_1 + x_2 + x_3$$

$$\text{c) } T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{e) } T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{f) } T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Exercice 9

Calculer la matrice associée à l'application linéaire $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par

$$T \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x + 3y + 5z + 7u \\ -x + 3y \\ x + 2y + 3z + 7u \end{pmatrix}$$

et déterminer si l'application est injective, surjective ou bijective.

Exercice 10

Considérons les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E = (1 \ 4).$$

Calculer les produits suivants (s'ils existent). Si les produits n'existent pas, expliquer pourquoi.

$$\text{a) } AB, BA, AC, CA, BC, CB, CD, EC, EA$$

$$\text{b) } AA^T, A^T A, BA^T, BC^T, C^T A, BD^T, D^T B$$

Exercice 11

$$\text{a) } \text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Est-ce que } AB = BA?$$

b) Même question pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
