

Série 2

Cette série fait suite aux chapitres 1.2-1.5 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay.

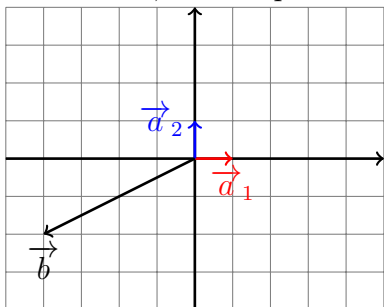
Cette collection d'exercices est longue, pour vous permettre de vous exercer plus. Nous n'attendons pas de vous que vous puissiez les terminer tous en deux heures.

Remarques : il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.

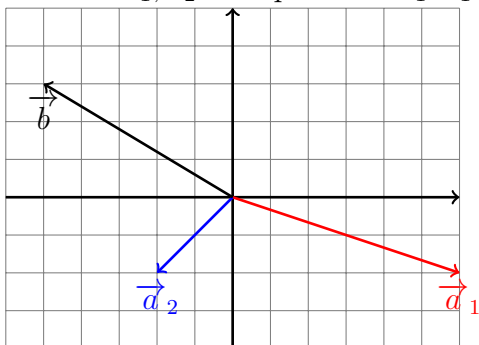
Exercice 1

À l'aide des graphes ci-dessous, trouver les coefficients des combinaisons linéaires demandées. Il se peut qu'il existe plusieurs solutions, ou aucune solution. Dans les graphes ci-dessous, un carré = 1 unité.

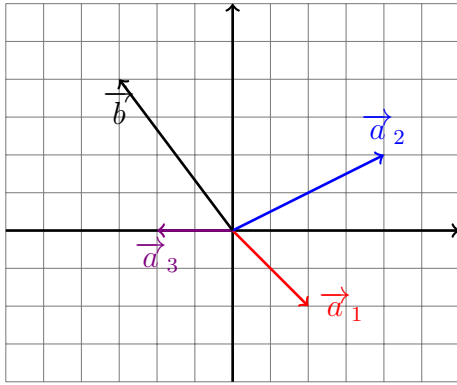
- a) Trouver λ_1, λ_2 tels que $\vec{b} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2$



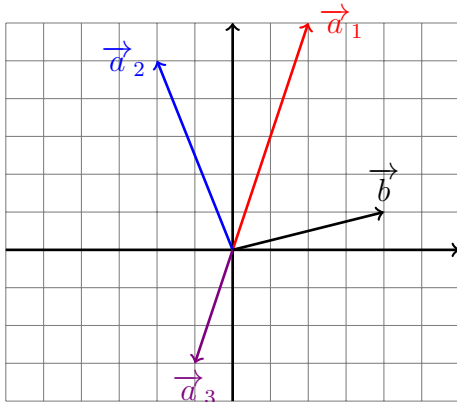
- b) Trouver λ_1, λ_2 tels que $\vec{b} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2$



- c) Trouver $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que $\vec{b} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3$



d) Trouver $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que $\vec{b} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3$. Peut-on trouver μ_1 et μ_3 tels que $\vec{b} = \mu_1 \vec{a}_1 + \mu_3 \vec{a}_3$?



Exercice 2

Considérons les vecteurs $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -13 \\ -3 \end{pmatrix}$, et $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Est-il possible d'écrire \vec{b} comme combinaison linéaire de \vec{a}_1 et \vec{a}_2 ?
- Donner une interprétation géométrique du résultat.

Exercice 3

Considérons les vecteurs $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$, et $\vec{b} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Pour quelle(s) valeur(s) de α le vecteur \vec{b} est-il une combinaison linéaire de \vec{a}_1 et \vec{a}_2 ?

Exercice 4

Considérons le système linéaire

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 4 \\ x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 7 \\ -3x_1 - 7x_2 + 9x_3 = -6. \end{cases}$$

- a) Écrire le système sous forme matricielle $A\vec{x} = \vec{b}$.
 b) Écrire le système comme une combinaison linéaire des colonnes de la matrice A .
 c) Trouver la solution de l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$.
 d) Subsidaire : écrire l'ensemble des solutions en fonction d'un paramètre.

Exercice 5

Déterminer si les systèmes linéaires homogènes suivants ont une solution non triviale.

a)
$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 8x_3 = 0 \\ -2x_1 - 7x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} -7x_1 + 37x_2 + 119x_3 = 0 \\ 5x_1 + 19x_2 + 57x_3 = 0 \end{cases}$$

Exercice 6

Calculer $A(\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2)$, où

a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3;$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \alpha_1 = -1, \alpha_2 = 1.$$

Exercice 7

Écrire les solutions des systèmes $A\vec{x} = \vec{b}$ suivants sous la forme $\vec{x} = \vec{p} + \vec{v}$, où \vec{p} est une solution particulière du système, et \vec{v} est la solution générale du système homogène $A\vec{x} = \vec{0}$.

a)
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 4 \\ x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 7 \\ -3x_1 - 7x_2 + 9x_3 = -6 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

Exercice 8

Soit $a \in \mathbb{R}$. A l'aide de l'algorithme de réduction (ou de Gauss-Jordan), déterminer les valeurs du paramètre a pour lesquelles le système

$$\begin{cases} ax + (1-a)y + (1-a)z = a^2 \\ ax + (1+a)y + (1+a)z = a - a^2 \\ x + y + z = 1 - a \end{cases}$$

- a) n'admet aucune solution,
- b) admet une infinité de solutions,
- c) admet une solution unique.

Ensuite résoudre le système dans les cas b) et c).

Exercice 9

Trouver la solution générale du système d'équations linéaires homogènes

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4u = 0 \\ 4x + 5y + 6z + 7u = 0 \\ 4x + 2y - 2u = 0 \\ x - y - 3z - 5u = 0 \end{cases}$$

Exercice 10

- a) Déterminer si les vecteurs $(1, 2, 3)$, $(2, 0, 0)$ et $(-2, 1, 0)$ engendrent \mathbb{R}^3 .
- b) Déterminer si les vecteurs $(2, -1, 2)$, $(4, 1, 3)$ et $(2, 2, 1)$ engendrent \mathbb{R}^3 .

Exercice 11

Les vecteurs suivants sont-ils linéairement indépendants? Engendrent-ils \mathbb{R}^3 (questions a) et b)) ou \mathbb{R}^2 (question c))?

$$\text{a) } \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b) } \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{c) } \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12

a) Les vecteurs $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont-ils linéairement dépendants?

b) Les vecteurs $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ engendrent-ils \mathbb{R}^3 ?

c) Les vecteurs $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ engendrent-ils \mathbb{R}^4 ?

Exercice 13

Soit A une matrice de taille $m \times n$. Montrer que les colonnes de A engendrent \mathbb{R}^m si et seulement si la forme échelonnée de la matrice A a une position pivot dans chaque ligne.

Copyright © Prof(s). de la section de mathématiques EPFL (Assyr Abdulle, Orane Pouchon, Jérôme Scherer, José Luis Zuleta, . . .). Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre: D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications*. De Boeck, Bruxelles, 2005.