Série 1

Remarques : il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.

Exercice 1

Parmi les équations suivantes, déterminer celles qui sont linéaires.

a) $x_1^2 + x_2^2 = 1$
b) $2^2 x_1 + 2^2 x_2 = 1$
c) $\sqrt{3}x_1 + \left(1 - \sqrt{2}\right) x_2 + 3 = \pi x_1$
d) $3x_1 + 2x_2 + 4\, x_3\, x_4 = 5$
e) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) x_1 - 2 = 2x_1 + 4x_2 + \sqrt{3}\, x_3 + x_9$

Exercice 2

Considérons l'équation suivante

$$\alpha x_1 + \beta x_2 = 1.$$

a) Dessiner la solution avec les paramètres $\alpha = 1$, $\beta = 3$.
b) Pour quelles valeurs de α, β la droite $\alpha x_1 + \beta x_2 = 1$ est-elle parallèle à la droite $-x_1 + x_2 = -1$?
c) Trouver les valeurs de α, β (si elles existent) telles que le système

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} -x_1 & + & x_2 & = & -1 \\ \alpha x_1 & + & \beta x_2 & = & 1 \\ (\alpha - 1)\, x_1 & + & (\beta + 1)\, x_2 & = & 0 \end{array} \right.$$

i) possède une infinité de solutions ;
ii) ne possède aucune solution ;
iii) possède une solution unique.

Exercice 3

i) Écrire les matrices augmentées correspondant aux systèmes linéaires suivants.
ii) Résoudre ces systèmes linéaires en utilisant des opérations élémentaires sur les lignes de ces matrices augmentées.

a) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ -x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 12 \\ x_3 + 2x_1 - 4x_2 = -1 \\ x_2 + 2x_3 - 4x_1 = -8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 11 \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 = -4 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 5 \\ 5x_3 - x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

Exercice 4

Les opérations suivantes sont-elles valides ?

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 - L_2 \\ L_2 - L_1 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_1 - L_2 \\ L_1 - L_3 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 5

Montrer que les opérations élémentaires sur les lignes (à savoir, l'ajout d'une ligne à une autre, l'échange de deux lignes, et la multiplication d'une ligne par un réel non nul) transforment un système linéaire en un système équivalent.

Exercice 6

Déterminer la solution générale des systèmes d'équations linéaires suivants :

a) $\begin{cases} 3x + y - 2z + 4u = 3 \\ x + 2y - z + 7u = 4 \\ 2x + 2y + z + 3u = 4 \\ x - y - z + u = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x + 4y - 3z + 3u = 0 \\ 3x + 2y + z + 2u = 0 \\ 2x + 5z + u = 0 \\ x + 2y - 4z + u = 0 \end{cases}$

Exercice 7

Montrer que le système d'équations linéaires suivant n'a pas de solution :

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - 2y - z - u = 3 \\ x + 3y + 2z + u = 5 \\ 3x + 4y + 3z + 3u = 7 \end{cases}$$

Exercice 8

a) Vérifier si les matrices suivantes sont sous forme échelonnée ou sous forme échelonnée réduite.
b) Identifier les variables de bases (ou principales) et les variables libres.
c) Déterminer si les systèmes linéaires correspondant possèdent exactement une solution, une infinité de solutions, ou bien aucune.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 9

Pour chacun des systèmes suivants :

i) Écrire la matrice augmentée.
ii) Transformer la matrice augmentée sous forme échelonnée réduite.
iii) Identifier les variables de bases et les variables libres, et écrire la solution générale.

a) $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 8 \\ 4x_1 - 3x_2 = 6 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \\ x_4 = -1 \end{cases}$$

d) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

e) $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \end{cases}$$
