Série 13

Cette série fait suite aux chapitres 7.1 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay, aussi bien que certains concepts vus au cours.

Remarques : il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.

Exercice 1

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Diagonaliser A en base orthonormée.

Note : on ne vous demande pas d'être capable de trouver les racines d'un polynôme général de degré 3 ou plus à l'examen ; ici, pour l'exercice, trouvez les racines par essai-erreur et demandez aux assistant.es si cela vous empêche de progresser.

Exercice 2

Chercher une décomposition en valeurs singulières des matrices suivantes.

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$,

ii) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

Soit A une matrice de taille $n \times n$.

i) Montrer que A est inversible si et seulement si A possède n valeurs singulières non nulles.

ii) Si A est inversible et $U\Sigma V^T$ est une décomposition en valeurs singulières de A, donner une décomposition en valeurs singulières de A^{-1}.

Exercice 4

Calculer les produits matriciels suivants :

$$\text{a)} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \qquad \text{b)} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}; \qquad \text{c)} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

En déduire le théorème suivant : Si A est une matrice $m \times n$ et B une matrice $n \times p$, alors le produit AB peut être obtenu par la formule colonne-ligne suivante :

$$AB = \mathrm{col}_1(A)\mathrm{lig}_1(B) + \cdots + \mathrm{col}_n(A)\mathrm{lig}_n(B), \tag{1}$$

où $\mathrm{col}_k(A)$ est la matrice $m \times 1$ correspondant à la $k^{\text{ème}}$ colonne de la matrice A, et $\mathrm{lig}_k(B)$ est la matrice $1 \times p$ correspondant à la $k^{\text{ème}}$ ligne de la matrice B.

Souvenez-vous de cette propriété du produit matriciel : on l'a utilisée en conjonction avec le théorème spectral et avec le théorème de la décomposition en valeurs singulières pour écrire une matrice A comme une somme de plusieurs matrices simples : $A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i \vec{v}_i^\top$ (pour une matrice symétrique) et $A = \sum_{i=1}^{\min(m,n)} \sigma_i \vec{u}_i \vec{v}_i^\top$ (pour une matrice quelconque). Faites explicitement le lien avec cet exercice.

Exercice 5

Ceci est un autre exercice de base concernant les produits matriciels, pour nous assurer que la différence entre $\vec{u}^T\vec{v}$ et $\vec{u}\,\vec{v}^T$ est bien claire.

On peut considérer tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ comme une matrice de dimension $n \times 1$. Soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

On appelle $\vec{u}^T\ \vec{v}$ produit scalaire (ou produit intérieur) des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

a) Ecrire $\vec{u}^T$ et $\vec{v}^T$.
b) Quelle est la taille des deux matrices produits $\vec{u}^T\ \vec{v}$ et $\vec{v}^T\ \vec{u}$?
c) Ces deux produits sont-ils égaux ? Pourquoi ?

Le produit $\vec{u}\ \vec{v}^T$ est appelé produit extérieur.

d) Quelle est la taille des deux matrices produits $\vec{u}\ \vec{v}^T$ et $\vec{v}\ \vec{u}^T$?
e) Ces deux produits sont-ils égaux ? Pourquoi ?
