Série 12

Cette série fait suite aux chapitres 6.4 6.5 6.6 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay, aussi bien que certains concepts vus au cours.

Remarques : il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.

Exercice 1

Déterminer la solution au sens des moindres carrés de $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$

a) en utilisant l'équation normale lorsque

i) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,

ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$;

b) en utilisant la méthode QR lorsque

i) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

ii) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

Soit A une matrice de taille $m \times n$.

a) Montrer que $\mathrm{Ker}A = \mathrm{Ker}(A^TA)$.

b) Montrer que A^TA est inversible si et seulement si les colonnes de A sont linéairement indépendantes.

Exercice 3

On considère les points

x_i	2	5	6	8
y_i	1	2	3	3

On suppose que la relation entre les x_i et les y_i suit une loi $y = ax + b$. Calculer a et b au sens des moindres carrés.

Exercice 4

Calculer le volume du parallélépipède dont un sommet se trouve à l'origine et les trois sommets adjacents se trouvent en $(1, 4, 0)$, $(-2, -5, 2)$ et $(-1, 2, -1)$.

Exercice 5

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

a) L'ensemble des solutions au sens des moindres carrés de $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ coïncide avec l'ensemble non vide des solutions de l'équation normale $A^T A\overrightarrow{x} = A^T \overrightarrow{b}$. ☐ ☐

b) Soit A une matrice $m \times n$ et $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^m$. Le problème général des moindres carrés consiste à trouver un $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$ qui rend $A\overrightarrow{x}$ aussi proche que possible de $\overrightarrow{b}$. ☐ ☐

c) Soit V un espace euclidien et soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in V$. Alors $(\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}) \cdot (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ pour tous $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in V$. ☐ ☐

d) L'espace $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire classique est un espace euclidien. ☐ ☐

Exercice 6

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

a) Soit A une matrice $n \times n$ qui peut se factoriser selon la factorisation QR comme $A = QR$. Alors, $Q^T A = R$.

b) Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Soit $\hat{\overrightarrow{y}}$ la projection orthogonale de $\overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n$ sur W. Alors $\hat{\overrightarrow{y}}$ dépend du choix de la base de W.

c) Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, tel que $W = \mathrm{Span}\{\overrightarrow{w}_1, \overrightarrow{w}_2\}$. Si $\overrightarrow{z} \in \mathbb{R}^n$ satisfait $\overrightarrow{z} \perp \overrightarrow{w}_1$ et $\overrightarrow{z} \perp \overrightarrow{w}_2$, alors $\overrightarrow{z} \in W^\perp$.

d) Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Si $\overrightarrow{y} \in W$, alors sa projection orthogonale sur W est $\overrightarrow{p}_W(\overrightarrow{y}) = \overrightarrow{y}$.

Exercice 7

Soit A une matrice symétrique de taille $n \times n$.

a) Montrer que $A\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \cdot A\overrightarrow{u}$ pour tous $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$.

b) Donner un contre-exemple à a) pour une matrice carrée quelconque, en trouvant une matrice B de taille 2×2 telle que $B\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{v} \cdot B\overrightarrow{u}$ en général.

Exercice 8

Diagonaliser les matrices suivantes sous la forme $A = QDQ^T$, avec Q une matrice orthogonale.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 9

Soit A une matrice symétrique de taille $n \times n$.

i) Montrer qu'il existe une base orthonormale $\{u_1, \ldots, u_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que
$$A = \lambda_1 u_1 u_1^T + \lambda_2 u_2 u_2^T + \ldots + \lambda_n u_n u_n^T.$$

ii) Calculer la décomposition ci-dessus pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 10

On suppose que A est une matrice symétrique réelle de taille $n \times n$.

a) Montrer qu'il existe une base orthonormale $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ (pas forcément distincts) tels que
$$A = \lambda_1 \vec{u}_1 \vec{u}_1^T + \lambda_2 \vec{u}_2 \vec{u}_2^T + \ldots + \lambda_n \vec{u}_n \vec{u}_n^T. \tag{1}$$

Cette expression est appelée décomposition spectrale de A.

b) Calculer la décomposition spectrale et vérifier l'égalité (1) pour

i) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ii) $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 11

Soit A une matrice symétrique inversible. Montrer qu'alors l'inverse de A est aussi symétrique.

Contrairement au solutionnaire, on vous recommande ici d'utiliser le théorème spectral.