# Série 11

Cette série fait suite aux chapitres 6.1 6.2 6.3 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay, aussi bien que certains concepts vus au cours.

**Remarques :** il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.

---

### Exercice 1

Soient les vecteurs

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Par “meilleure approximation”, on veut dire “le vecteur le plus proche”. La distance entre le vecteur et sa meilleure approximation (= sa projection orthogonale) dans un sous-espace est ce qu'on appelle la distance entre le vecteur et le sous-espace. Il existe de nombreuses façon de calculer cette meilleure approximation : commencez avec l'approche basique comme vue en classe. Plus tard, on verra aussi des façons de procéder via moindres carrés (les équations normales) et Gram-Schmidt : cela est aussi expliqué dans les solutions, mais vous pouvez revisiter cela plus tard, quand on en aura parlé en classe.

a) Trouver la meilleure approximation de $\vec{v}$ par un vecteur de la forme $\alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2$.
b) Calculer la distance entre $\vec{v}$ et $\text{Span}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$.

Soient maintenant les vecteurs

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

c) Trouver la meilleure approximation de $\vec{v}$ par un vecteur de la forme $\alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2$.
d) Calculer la distance entre $\vec{v}$ et $\text{Span}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$.

### Exercice 2

Soient $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ et $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ deux bases orthonormales de $\mathbb{R}^n$. On définit les matrices de taille $n \times n$, $U = (\vec{u}_1 \dots \vec{u}_n)$ et $V = (\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n)$. Montrer que $U^T U = I_n$, $V^T V = I_n$ et que $UV$est inversible.

**Exercice 3**

a) Montrer que si $Q$ est une matrice orthogonale, alors $Q^T$ est aussi une matrice orthogonale.
b) Montrer que si $U, V$ sont des matrices $n \times n$ orthogonales, alors $UV$ est aussi une matrice orthogonale.
c) Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$ ($\|\overrightarrow{u}\| = 1$). Montrer que la matrice $Q = I_n - 2\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{u}^T$ est orthogonale.
d) Montrer que toute valeur propre réelle $\lambda$ d'une matrice orthogonale $Q$ vérifie $\lambda = \pm 1$.
e) Soit $Q$ une matrice orthogonale de taille $n \times n$. Soit $\{\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_n\}$ une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\{Q\overrightarrow{u}_1, ..., Q\overrightarrow{u}_n\}$ est aussi une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$.

**Exercice 4**

Appliquer la méthode de Gram-Schmidt pour orthogonaliser les bases de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ suivantes.

L'exercice ne vous demande que de calculer une base orthogonale (pas nécessairement orthonormée) et c'est aussi que ce que le solutionnaire vous propose. Vous pouvez bien sur calculer une base orthonormée (car elle est orthogonale en particulier). Ceci a l'avantage d'également révéler la factorisation QR comme vu en classe.

a) $\{\overrightarrow{w}_1, \overrightarrow{w}_2\}$ base d'un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$, avec $\overrightarrow{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) $\{\overrightarrow{w}_1, \overrightarrow{w}_2, \overrightarrow{w}_3\}$ base d'un s.e.v. de $\mathbb{R}^4$, avec $\overrightarrow{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

c) Donner une base orthonormale pour a) et b).

**Exercice 5**

Calculer la décomposition QR des matrices suivantes.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$,

c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.