Série 10

Cette série fait suite aux chapitres 5.3, 5.4, 6.1 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay, aussi bien que certains concepts vus au cours.

Remarques : il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.

Exercice 1

Toute matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a un polynôme caractéristique p_A qui peut s'écrire sous forme factorisée comme suit : $p_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)\cdots(\lambda_n - \lambda)$, où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les n valeurs propres de A (réelles ou complexes, et pas forcément toutes différentes).

Montrez que $\det(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$. Avec des mots : le déterminant d'une matrice est égal au produit de ses valeurs propres (multiplicités comprises). Ceci est vrai pour toute matrice carrée (même si elle n'est pas diagonalisable).

Exercice 2

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer

a) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$.

b) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{w}$.

c) $(\alpha\vec{u})\cdot\vec{v} = \alpha(\vec{u}\cdot\vec{v}) = \vec{u}\cdot(\alpha\vec{v})$.

d) $\vec{u}\cdot\vec{u} \geq 0$ et $\vec{u}\cdot\vec{u} = 0$ si et seulement si $\vec{u} = \vec{0}$.

Exercice 3

a) Trouver un vecteur non nul orthogonal à $\vec{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calculer

$$\vec{u}\cdot\vec{v}, \quad \vec{v}\cdot\vec{w}, \quad \frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{\|\vec{v}\|}, \quad \frac{1}{\vec{w}\cdot\vec{w}}\vec{w}, \quad \frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{\|\vec{v}\|}\vec{v}.$$

c) Calculer la distance entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et la distance entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$.

d) Calculer les vecteurs unitaires correspondant à $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ (pointant dans la même direction que le vecteur original).

Exercice 4

Soit $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donner l'ensemble W des vecteurs orthogonaux à $\overrightarrow{v}$. Est-ce un espace vectoriel ? Si oui, de quelle dimension ?

Exercice 5

Soient $\overrightarrow{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que $\overrightarrow{u}_1$ et $\overrightarrow{u}_2$ sont orthogonaux.

b) Calculer la projection orthogonale $\overrightarrow{p}_W(\overrightarrow{v})$ de $\overrightarrow{v}$ sur $W = \text{Span}\{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2\}$.

c) Donner la décomposition $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{z} + \overrightarrow{p}_W(\overrightarrow{v})$, où $\overrightarrow{z} \in W^\perp$.

Même question pour $\overrightarrow{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Même question pour $\overrightarrow{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 6

Soit U un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et $\{\overrightarrow{u}_1, \dots, \overrightarrow{u}_p\}$ une base orthogonale de U. On considère la transformation $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie par $T(\overrightarrow{v}) = \text{proj}_{\text{U}}(\overrightarrow{v})$. Montrer que T est une transformation linéaire.

Indication : utiliser la définition de la projection orthogonale.

Exercice 7

Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Soit $\{\overrightarrow{w}_1, \dots, \overrightarrow{w}_q\}$ une base orthogonale de W. Soit $\{\overrightarrow{v}_1, \dots, \overrightarrow{v}_r\}$ une base orthogonale de $W^\perp$.
Montrer que $\{\overrightarrow{w}_1, \dots, \overrightarrow{w}_q, \overrightarrow{v}_1, \dots, \overrightarrow{v}_r\}$ est orthogonale et prouver la relation

$$\text{dim}W + \text{dim}W^\perp = n.$$

Exercice 8

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

a) Soit $\|.\|$ la norme euclidienne. Alors pour un vecteur $\overrightarrow{v}$, $\|c\overrightarrow{v}\| = c\,\|\overrightarrow{v}\|$ quel que soit le scalaire c. ☐ ☐

b) Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si

$$\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2\,\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\| + \|\overrightarrow{v}\|^2 .$$

☐ ☐

c) Si un vecteur $\overrightarrow{v}$ est orthogonal à tous les vecteurs sauf un d'une base d'un sous-espace W, alors $\overrightarrow{v}$ appartient à $W^\perp$. ☐ ☐

d) Soit W un sous-espace d'un espace vectoriel V. Si la dimension de l'espace $W^\perp$ est égale à 1, alors on peut trouver une base de V formée par des vecteurs de W. ☐ ☐