















Ens: N. Boumal
Algèbre linéaire - (n/a)
21 novembre 2025
Durée: 60 minutes

BLANK

SCIPER : 999999

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 4 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
 - +3 points si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
 - +1 point si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes Read these guidelines Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse Correct an answer Antwort korrigieren
  		 
ce qu'il ne faut PAS faire what should NOT be done was man NICHT tun sollte		
     		



Notations

- Pour une matrice A , a_{ij} désigne l'élément situé sur la ligne i et la colonne j de la matrice.
- Pour un vecteur $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, x_i désigne la i -ème composante de \vec{x} .
- I_m désigne la matrice identité de taille $m \times m$.
- \mathbb{P}_n désigne l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n .
- $\mathbb{R}^{m \times n}$ désigne l'espace vectoriel des matrices de taille $m \times n$ à coefficients réels.

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondant à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

Question 1 : Soit $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ et soit $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y - 5z \\ -2x + y + 7z \\ x - 2z \end{pmatrix}.$$

Alors

- le vecteur \vec{v} est dans $\text{Ker}(T)$, mais pas dans $\text{Im}(T)$.
- le vecteur \vec{v} est dans $\text{Im}(T)$, mais pas dans $\text{Ker}(T)$.
- le vecteur \vec{v} est dans $\text{Im}(T)$ et dans $\text{Ker}(T)$.
- le vecteur \vec{v} n'est ni dans $\text{Ker}(T)$, ni dans $\text{Im}(T)$.

Question 2 : Le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

possède une solution unique telle que

- $x_4 = \frac{1}{2}$.
- $x_4 = -2$.
- $x_4 = 1$.
- $x_4 = -\frac{5}{2}$.

Question 3 : Soit

$$A = \begin{pmatrix} \pi & 1 & 3 & 1 \\ 2\pi & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Alors l'inverse $B = A^{-1}$ de la matrice A est tel que

- $b_{22} = 1$.
- $b_{21} = 7$.
- $b_{23} = 5$.
- $b_{24} = 3$.

Question 4 : Soit W l'espace vectoriel des matrices symétriques de taille 2×2 . La deuxième coordonnée de

la matrice $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in W$ dans la base $\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right)$ de W est

- 1.
- 2.
- $-\frac{3}{4}$.
- $\frac{1}{4}$.



Question 5 : Soit a un nombre réel. Le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} a x_1 & + & x_3 & = & 1 \\ & a x_2 & & + & x_4 = 0 \\ x_1 & & + & a x_3 & = 1 \\ & x_2 & & + & a x_4 = 1 \\ x_1 & + & x_3 & = & a \end{cases}$$

possède exactement une solution si et seulement si

$a \in \{-1, 1, -2\}$. $a \in \{-1, 1\}$. $a \in \{-2, 1\}$. $a = -2$.

Question 6 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ définie par

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors

$\det(B) = \alpha^2(\alpha - 1)^2$. $\det(B) = \alpha(\alpha + 1)(\alpha^2 - 4)$.
 $\det(B) = \alpha(\alpha + 2)(\alpha - 1)^2$. $\det(B) = \alpha^2(\alpha^2 - 4)$.

Question 7 : Soit $T: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{P}_2$ l'application linéaire définie par

$$T \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = b_{12} - (b_{11} + b_{22})t + b_{21}t^2.$$

Soient

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \right) \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = (1, 1 + t^2, t + t^2)$$

des bases de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ et \mathbb{P}_2 respectivement. La matrice A associée à T par rapport à la base \mathcal{B} de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ et la base \mathcal{C} de \mathbb{P}_2 , telle que $[T(B)]_{\mathcal{C}} = A[B]_{\mathcal{B}}$ pour tout $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, satisfait

$a_{12} = -6$. $a_{12} = 2$. $a_{12} = 3$. $a_{12} = -4$.

Question 8 : Soit $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ une base de \mathbb{R}^3 et soit $\mathcal{C} = (\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$ la base de \mathbb{R}^3 formée des vecteurs

$$\vec{c}_1 = \vec{b}_1 - \vec{b}_2, \quad \vec{c}_2 = \vec{b}_1 - \vec{b}_3 \quad \text{et} \quad \vec{c}_3 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \vec{b}_3.$$

Soit P la matrice de changement de base telle que $[\vec{v}]_{\mathcal{C}} = P[\vec{v}]_{\mathcal{B}}$ pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$. Alors

$p_{23} = 2$. $p_{23} = -\frac{2}{3}$. $p_{23} = 0$. $p_{23} = 1$.



Deuxième partie, questions de type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 9 : Soient A et B deux matrices de taille 3×3 . Si $\det(A) = 2$, alors

$$\det(BA^{-1}B) = \frac{1}{2} \det(B)^2.$$

VRAI FAUX

Question 10 : Le nombre de lignes non nulles dans la forme échelonnée réduite d'une matrice est égal à son rang.

VRAI FAUX

Question 11 : Si A est une matrice de taille $m \times n$ telle que $\text{Im}(A) = \mathbb{R}^m$, alors pour tout choix de $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, le système $A\vec{x} = \vec{b}$ possède une solution unique.

VRAI FAUX

Question 12 : Soient V et W deux espaces vectoriels et soient $T, S: V \rightarrow W$ deux applications linéaires. Si $\text{Ker}(T) = \text{Ker}(S)$, alors $\text{Im}(T) = \text{Im}(S)$.

VRAI FAUX

Question 13 : L'ensemble

$$\{p \in \mathbb{P}_n : p(1)p(2) = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de \mathbb{P}_n .

VRAI FAUX

Question 14 : Soit V un espace vectoriel et soit $T: V \rightarrow \mathbb{R}$ une application linéaire. Si $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in V$ sont tels que

$$T(\vec{v}_1) = 2, \quad T(\vec{v}_2) = 3 \quad \text{et} \quad T(\vec{v}_3) = 1,$$

alors $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3$ est dans $\text{Ker}(T)$.

VRAI FAUX

Question 15 : Soit V un espace vectoriel et soient $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ trois vecteurs de V . Si l'ensemble $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est linéairement indépendant, alors l'ensemble $\{\vec{v}_1 - \vec{v}_2, \vec{v}_1 - \vec{v}_3, \vec{v}_2 - \vec{v}_3\}$ est linéairement indépendant.

VRAI FAUX

Question 16 : Soient A une matrice de taille $m \times n$ et B une matrice de taille $n \times m$. Si AB est inversible, alors A et B sont inversibles.

VRAI FAUX