Série 9 (Corrigé)

Cette série fait suite aux chapitres 5.1, 5.2, 5.3 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay, aussi bien que certains concepts vus au cours.

Remarques : il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.

Exercice 1

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

		V	F
a)	La matrice A n'est pas inversible si et seulement si 0 est une valeur propre de A.	☐	☐
b)	Une matrice A carrée est inversible si et seulement si elle est diagonalisable.	☐	☐
c)	Les valeurs propres d'une matrice carrée sont sur sa diagonale.	☐	☐
d)	On trouve les valeurs propres de A en réduisant la matrice à sa forme échelonnée.	☐	☐

Sol.: Vrai : a). Faux : b), c), d).

a) Vrai. Supposons A de taille $n \times n$. Alors 0 est valeur propre de A si et seulement s'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ avec $x_0 \neq 0$ tel que $Ax_0 = 0$. Ceci est equivalent à dire que $\mathrm{Ker}(A) \neq 0$, c'est-à-dire A n'est pas injective ce qui est equivalent à non inversible puisque A est carrée.

b) Faux. Prenons $A = 0$ la matrice nulle. Alors A est diagonale (donc diagonalisable) mais pas inversible.

c) Faux. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Alors 0 et 2 sont ses valeurs propres mais ces valeurs ne se trouvent pas sur la diagonale.

d) Faux. Dans l'exemple ci-dessus la forme échelonnée réduite de A est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mais la valeur propre 2 de A n'apparaît pas dans celle-ci.

Exercice 2

Soit A une matrice de taille $n \times n$. Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses (justifier).

		V	F
a)	A est diagonalisable si et seulement si elle possède n valeurs propres distinctes.	☐	☐
b)	A est diagonalisable si A possède n vecteurs propres.		
c)	Si A est diagonalisable, alors A est inversible.	☐	☐
d)	Si A est inversible, alors A est diagonalisable.	☐	☐

e) Si 0 est valeur propre, alors rang $(A) < n$. ☐ ☐

f) Pour tout matrice inversible P de taille $n \times n$, λ est une valeur propre de A si et seulement si λ est une valeur propre de $P^{-1}AP$. ☐ ☐

Sol.:

a) Faux. En effet la matrice identité est diagonale donc diagonalisable, et pourtant sa seule valeur propre est 1.

b) Faux. A doit posséder n vecteurs propres linéairement indépendants. Pour un contre-exemple il suffit de prendre $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui n'est pas diagonalisable et qui possède une infinité de vecteurs propres $\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$ (pour $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) pour la valeur propre $\lambda = 1$.

c) Faux. Méthode 1 : La matrice nulle est diagonalisable mais non inversible.
Méthode 2 : On peut aussi proposer la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ diagonale donc diagonalisable, mais non inversible.

d) Faux (pour $n \geqslant 2$). En effet, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible, mais non diagonalisable, car l'espace propre associé à la valeur propre 1 (de multiplicité 2) est de dimension seulement 1.

e) Vrai. Si 0 est valeur propre, la dimension du noyau est non nulle, et donc rang $(A) = n - \dim \operatorname{Ker} A < n$.

f) Vrai. A et $B = P^{-1}AP$ sont semblables, donc elles ont les mêmes valeurs propres (avec les mêmes multiplicités).
Remarque : si on note $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots$ les vecteurs propres de B, alors les vecteurs propres de A sont $P\overrightarrow{v}_1, P\overrightarrow{v}_2, \ldots$.

Exercice 3

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

a) Un espace propre d'une matrice carrée A est l'espace nul d'une certaine matrice. ☐ ☐

b) Soit A une matrice carrée. Si A^2 est la matrice nulle, alors la seule valeur propre de A est 0. ☐ ☐

c) Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont les éléments de sa diagonale principale. ☐ ☐

d) L'ensemble $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}\}$ des vecteurs propres associés aux valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ d'une matrice carrée A est linéairement dépendant. ☐ ☐

Sol.: Vrai : a), b), c). Faux : d).

a) Vrai. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A de taille $n \times n$. Alors l'espace propre associé à λ est par définition $E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = \lambda x\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (A - \lambda I_n)x = 0\} = \operatorname{Ker}(B)$ où $B = A - \lambda I_n$.

b) Vrai. Soit A de taille $n \times n$ telle que $A^2 = 0$ et soit $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\overrightarrow{v} \neq 0$ et $A\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{v}$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. On a alors que $\overrightarrow{0} = A^2\overrightarrow{v} = A(A\overrightarrow{v}) = A(\lambda\overrightarrow{v}) = \lambda A\overrightarrow{v} = \lambda^2\overrightarrow{v}$. Comme $\overrightarrow{v} \neq 0$ ceci implique que $\lambda^2 = 0$ et donc $\lambda = 0$ est la seule valeur propre de A.

c) Vrai. Soit A triangulaire supérieure (le cas inférieur étant similaire), disons $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Les valeurs propres de A étant les racines du polynôme caractéristique de A on calcule celui-ci :

$$p_a(t) = \det(A - tI_n) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - t & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} - t & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} - t \end{pmatrix} = (a_{11} - t) \cdots (a_{nn} - t).$$

d) Vrai. Nous allons prouver l'assertion par récurrence sur n le nombre de vecteurs propres de A.

Si $n = 1$ l'assertion est vraie car un vecteur propre est non-nul par définition donc la famille $\{v_1\}$ est linéairement indépendante.

Supposons $n \neq 2$ et le résultat vrai pour $n - 1$ vecteurs propres ayant des valeurs propres distinctes.

Par l'absurde, supposons que v_1 soit combinaison linéaire de $v_2, \ldots, v_n$ disons $v_1 = \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$. En appliquant A à cette équation on obtient

$$\lambda_1 v_1 = Av_1 = A(\alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_2 \lambda_2 v_2 + \cdots + \alpha_n \lambda_n v_n$$

Donc $\lambda_1(\alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_2 \lambda_2 v_2 + \cdots + \alpha_n \lambda_n v_n$ ce qui s'écrit

$$\alpha_2(\lambda_1 - \lambda_2) v_2 + \cdots + \alpha_n(\lambda_1 - \lambda_n) v_n$$

Les $n - 1$ vecteurs $v_2, \ldots, v_n$ étant linéairement indépendants on obtient que

$$\alpha_2(\lambda_1 - \lambda_2) = \cdots = \alpha_n(\lambda_1 - \lambda_n) = 0$$

et comme les λ_i sont distincts ceci implique que $\alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$ ce qui entraîne que $v_1 = 0$ absurde (puisque v_1 est vecteur propre donc non nul).

Exercice 4

a. Soit A une matrice de taille 3×3 inversible et λ une valeur propre de A.

☐ Alors λ^{-1} est une valeur propre de $-A$.

☐ Alors λ est une valeur propre de $-A$.

☐ Alors λ^{-1} est une valeur propre de A^{-1}.

☐ Alors λ est une valeur propre de A^{-1}.

b. Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

☐ Alors seulement 6 est une valeur propre de A.

☐ Alors -6 et -4 sont valeurs propres de A.

☐ Alors 6 et 0 sont valeurs propres de A.

☐ Alors -4 et 6 sont valeurs propres de A.

c. Soit $\mathcal{B} = (1-t, 1+t, 1+t+t^2)$ et $\mathcal{C} = (1, t-\frac{1}{2}, t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4})$.

☐ Alors $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{P}_2$, mais pas $\mathcal{C}$.

☐ Alors $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{P}_2$, et $\mathcal{C}$ aussi.

☐ Alors $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{P}_2$, mais pas $\mathcal{B}$.

☐ Alors $\mathcal{B}$ n'est pas une base de $\mathbb{P}_2$, et $\mathcal{C}$ non plus.

d. Soit $\mathcal{B} = (1-t, 1+t, 1+t+t^2)$ et $\mathcal{C} = (1, t-\frac{1}{2}, t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4})$. Soit encore S la matrice de changement de base de B à C et soit T la matrice de changement de base de C à B.

☐ Alors $s_{13} = 0$ et $t_{23} = 0$.

☐ Alors $s_{13} = 9/16$ et $t_{23} = 3/2$.

☐ Alors $s_{13} = -1$ et $t_{23} = -3/4$.

☐ Alors $s_{13} = 3/2$ et $t_{23} = -9/8$.

e. Soit A une matrice de taille 2×2 qui n'est pas inversible. Alors

☐ 0 est une valeur propre de A.

☐ A est la matrice nulle.

☐ A n'a pas de valeur propre réelle.

☐ tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ est un vecteur propre de A.

Sol.:

a. ☐ Alors λ^{-1} est une valeur propre de A^{-1}.

En effet, si $\overrightarrow{x}$ est un vecteur propre de la matrice A pour la valeur propre λ, on a $A\overrightarrow{x} = \lambda\overrightarrow{x}$. Multiplions cette égalité à gauche par la matrice inverse A^{-1} :

$$\overrightarrow{x} = A^{-1}A\overrightarrow{x} = A^{-1}\lambda\overrightarrow{x} = \lambda A^{-1}\overrightarrow{x}$$

Ainsi, en divisant par λ, on conclut que l'inverse de λ est une valeur propre de l'inverse de A, pour le même vecteur propre ! Il n'y a aucune raison pour que λ soit une valeur propre de A^{-1} et pour que λ ou λ^{-1} soit une valeur propre de $-A$. Pensons en effet à la matrice $2I$ dont la seule valeur propre est 2. Par contre, il est vrai que $-\lambda$ est une valeur propre de $-A$ puisque si $\overrightarrow{x}$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre λ, alors $(-A)\overrightarrow{x} = -A\overrightarrow{x} = -\lambda\overrightarrow{x}$.

b. ☐ Alors -4 et 6 sont valeurs propres de A.

On voit que 6 est une valeur propre de A car $6 = 1 + 5$, voir exercices 5, 6 et 7. On voit aussi que -4 est valeur propre de A, car $1 - 5 = -4$, voir exercice 7. Comme les deux lignes de A ne sont pas colinéaires, le noyau de A est nul si bien que 0 n'est pas valeur propre, et -6 n'est pas valeur propre non plus car $A + 6I_2$ est de rang 2. Nous verrons bientôt qu'une matrice carrée de taille $n \times n$ ne peut avoir plus de n valeurs propres, nous aurions donc pu nous contenter d'observer que 6 et -4 sont valeurs propres pour éliminer les réponses 1, 2 et 3.

c. ☐ Alors $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{P}_2$, et $\mathcal{C}$ aussi.

Les deux familles proposées forment des bases. On peut le voir par exemple pour chacune des bases en écrivant la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de coordonnées des polynômes donnés par rapport à la base canonique. Cette matrice est inversible dans les deux cas.

d. ☐ Alors $s_{13} = 3/2$ et $t_{23} = -9/8$.

Les matrices de changement de base sont :

$$S = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 & 3/2 \\ -1 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} 1/2 & -3/4 & 3/8 \\ 1/2 & 1/4 & -9/8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

e. ☐ 0 est une valeur propre de A.

Par l'exercice 7 première partie, comme $A = A - 0 \cdot I_2$ n'est pas inversible, le système $A\overrightarrow{x} = 0$ admet une solution non nulle. Autrement dit, 0 est une valeur propre de A. En particulier, cela implique que A a une valeur propre réelle. Ensuite, considérer la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

qui n'est pas inversible et non nulle. Finalement, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ n'est pas un vecteur propre de A, par exemple.

Exercice 5

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice de taille $n \times n$.

a) On suppose que $a_{i1} + a_{i2} + \ldots + a_{in} = \lambda$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. Montrer que λ est une valeur propre de A. Quel est le vecteur propre associé ?

b) On suppose que $a_{1j} + a_{2j} + \ldots + a_{nj} = \lambda$ pour tout $j = 1, \ldots, n$. Montrer que λ est une valeur propre de A.

Sol.:

a) Soit $\overrightarrow{v} = (1\ 1 \dots 1)^T$. Matriciellement, on a

$$A\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{v}$$

et donc λ est une valeur propre avec pour vecteur propre $\overrightarrow{v}$.

b) La matrice A^T vérifie l'hypothèse du a), donc λ est une valeur propre de A^T. Or, A et A^T ont les mêmes valeurs propres d'après l'exercice 6 b), d'où le résultat.

Exercice 6

Soit A une matrice de taille 2×2 et $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

a) Montrer que le système $A\overrightarrow{x} = \lambda\overrightarrow{x}$ a une solution non nulle si et seulement si la matrice $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible.

b) Dès maintenant $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $A\overrightarrow{x}$.

c) Trouver pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ la matrice $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible.

d) Montrer que les deux valeurs trouvées ci-dessus sont des valeurs propres de A.

e) Calculer les espaces propres correspondants aux deux valeurs propres.

Sol.: Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

a) Le système $A\overrightarrow{x} = \lambda\overrightarrow{x}$ a une solution non nulle si et seulement s'il existe un vecteur non nul $\overrightarrow{x}$ tel que

$$\overrightarrow{0} = A\overrightarrow{x} - \lambda\overrightarrow{x} = A\overrightarrow{x} - \lambda I_2\overrightarrow{x} = (A - \lambda I_2)\overrightarrow{x}$$

Ceci signifie que le système homogène associé à la matrice $A - \lambda I_2$ a une solution non triviale, autrement dit cette matrice n'est pas inversible.

b) On calcule $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + 3v \\ 3u + v \end{pmatrix}$

c) La matrice $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible si et seulement son déterminant est nul. Il suffit donc de calculer

$$\det(A - \lambda I_2) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 3^2$$

Pour que ce déterminant soit nul il faut donc que $(1-\lambda)^2 = 9$, autrement dit $1 - \lambda = \pm 3$. On en conclut que les valeurs cherchées sont $\lambda_1 = -2$ et $\lambda = 4$.

d) Lorsque λ vaut -2 ou 4, la matrice $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible et le système de la partie 2 a donc une solution non triviale. Cela veut exactement dire que cette solution non triviale forme un vecteur propre. Ainsi les les valeurs propres sont -2 et 4.

e) On calcule $E_4 = \mathrm{Vect}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ et $E_{-2} = \mathrm{Vect}\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$.

Exercice 7

On considère une séquence de nombres réels $n_0, n_1, n_2, n_3, \dots$ qui satisfont à la règle

$$n_{k+1} = \frac{1}{3}n_{k-1} + \frac{2}{3}n_k$$

pour $k = 1, 2, 3, \ldots$. Si $n_0 = -3$ et $n_1 = 1$, que vaut n_k pour tout k ? (Essayez de donner une formule explicite.) Comment se comporte la séquence quand k devient grand ? Plus précisément, est-ce que les nombres n_k deviennent très grands ou très petits ou autre ? Question plus large : que se passe-t-il si on change les conditions initiales (c'est-à-dire, n_0 et n_1) ? ***Sol.:*** Revisitez la façon dont nous avons traîté la suite de Fibonacci. Exprimez le vecteur

$[n_{k+1}, n_k]^\top$ comme le produit d'une matrice 2×2 avec le vecteur $[n_k, n_{k-1}]^\top$. Ensuite, étudiez les valeurs et vecteurs propres de la matrice, et comparez avec le vecteur initial $[n_1, n_0]^\top$.

Nous observons que

$$\begin{aligned}
n_2 &= \frac{1}{3}n_0 + \frac{2}{3}n_1 \\
n_3 &= \frac{1}{3}n_1 + \frac{2}{3}n_2 \\
&\ldots \\
n_{k+1} &= \frac{1}{3}n_{k-1} + \frac{2}{3}n_k \\
&\ldots
\end{aligned}$$

que l'on peut écrire sous forme vectorielle comme

$$\begin{bmatrix} n_2 \\ n_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} n_3 \\ n_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_2 \\ n_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)^2 \begin{bmatrix} n_1 \\ n_0 \end{bmatrix}$$

et, par récurrence, pour un k arbitraire, on peut montrer que

$$\begin{bmatrix} n_{k+1} \\ n_k \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)^k \begin{bmatrix} n_1 \\ n_0 \end{bmatrix}$$

En posant

$$M := \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

on voit que calculer le terme général n_k revient à calculer la puissance k-ième de la matrice M. Pour cela, il faut déterminer ses valeurs propres et vecteurs propres, qui sont $\lambda_1 = 1$ avec vecteur propre correspondant $v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ et $\lambda_2 = -\frac{1}{3}$ avec $v_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}^T$.

À partir de là, pour calculer $M^k \begin{bmatrix} n_1 \\ n_0 \end{bmatrix}$, on peut écrire la décomposition spectrale $M = U\Sigma U^{-1}$ (ce qui demande de calculer U^{-1}, mais c'est facile car la matrice est 2×2). On obtient alors $M^k = U\Sigma^k U^{-1}$. Dans notre cas :

$$M^k = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{3}\right)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$
$$= \frac{3}{4} \begin{bmatrix} 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{k+1} & \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{3}\right)^{k+1} \\ 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^k & \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{3}\right)^k \end{bmatrix}$$

Par conséquent, en utilisant les conditions initiales $n_0 = -3$ et $n_1 = 1$, on obtient :

$$\begin{bmatrix} n_{k+1} \\ n_k \end{bmatrix} = \frac{3}{4} \begin{bmatrix} 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{k+1} & \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{3}\right)^{k+1} \\ 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^k & \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{3}\right)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{3}{4} \begin{bmatrix} -4\left(-\frac{1}{3}\right)^{k+1} \\ -4\left(-\frac{1}{3}\right)^k \end{bmatrix}$$

On en déduit donc que

$$n_k = -3\left(-\frac{1}{3}\right)^k = (-1)^{k+1}\frac{1}{3^{k-1}}.$$

Ainsi, lorsque $k \to \infty$, on a $n_k \to 0$.

Ou bien, de façon alternative, au lieu de calculer M^k, on peut exprimer le vecteur

$$\begin{bmatrix} n_1 \\ n_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

comme une combinaison linéaire des vecteurs propres v_1 et v_2, c'est-à-dire

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

On résout pour c_1, c_2, puis on calcule :

$$\begin{bmatrix} n_{k+1} \\ n_k \end{bmatrix} = M^k \begin{bmatrix} n_1 \\ n_0 \end{bmatrix} = M^k(c_1 v_1 + c_2 v_2) = c_1 \underbrace{M^k v_1}_{=\lambda_1^k v_1} + c_2 \underbrace{M^k v_2}_{=\lambda_2^k v_2} = c_1 \lambda_1^k v_1 + c_2 \lambda_2^k v_2.$$

Exercice 8

Rappels de nombres complexes. Le conjugué d'un nombre complexe $z = a + ib$ s'écrit $\bar{z}$ et est défini comme étant $\bar{z} = a - ib$.

Montrer que pour $z, w \in \mathbb{C}$ on a

a) $\overline{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$,
b) $zw = wz$,
c) $\overline{w+z} = \overline{w} + \overline{z}$,
d) $\overline{wz} = \overline{w} \cdot \overline{z}$,
e) $\overline{rz} = r\overline{z}$ si $r \in \mathbb{R}$,
f) $|wz| = |w| \cdot |z|$,
g) $|w+z| \leqslant |w| + |z|$.

Sol.: Soit z et w de la forme $z = a + bi$ et $w = c + di$, où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

a) $\overline{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$,

$\overline{z} = z \ \Leftrightarrow\ \overline{a+bi} = a + bi \ \Leftrightarrow\ a - bi = a + bi \ \Leftrightarrow\ b = 0 \ \Leftrightarrow\ z \in \mathbb{R}$.

b) On a

$$\begin{aligned} zw &= (a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+cb)i, \\ wz &= (c+di)(a+bi) = (ac-bd) + (ad+cb)i. \end{aligned}$$

c) $\overline{w+z} = \overline{(a+c) + (b+d)i} = (a+c) - (b+d)i = (a-bi) + (c-di) = \overline{w} + \overline{z}$.

d) On a

$$\begin{aligned} \overline{wz} &= \overline{(ac-bd) + (ad+cb)i} = (ac-bd) - (ad+cb)i, \\ \overline{w} \cdot \overline{z} &= (c-di)(a-bi) = (ac-bd) - (ad+cb)i. \end{aligned}$$

e) En utilisant (d) et (a) on a $\overline{rz} = \overline{r} \cdot \overline{z} = r\overline{z}$.

f) On a $|z|^2 = z\overline{z} = a^2 + b^2 \geqslant 0$ et $|w|^2 = w\overline{w} = c^2 + d^2 \geqslant 0$. Alors, en utilisant (d) et (b) on a

$$|wz|^2 = wz\overline{wz} = w\overline{w}z\overline{z} = |w|^2 \cdot |z|^2.$$

$$\Rightarrow |wz| = |w| \cdot |z|.$$

g) On remarque que

1) $\overline{\overline{z}} = z$,
2) $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$,
3) $\mathrm{Re}(z) \leqslant |z|$
4) $|z| = |\overline{z}|$.

Donc on a

$$\begin{aligned} |w+z|^2 = (w+z)(\overline{w+z}) &\overset{(c)}{=} w\overline{w} + z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} \\ &\overset{(b),(1),(d)}{=} |w|^2 + |z|^2 + z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} \overset{(2)}{=} |w|^2 + |z|^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{w}) \\ &\overset{(3)}{\leqslant} |w|^2 + |z|^2 + 2|z\overline{w}| \overset{(f),(4)}{=} |w|^2 + |z|^2 + 2|z| \cdot |w| \\ &= (|w| + |z|)^2. \end{aligned}$$

Exercice 9

Conseil : pour calculer $\frac{1}{z}$ où z est complexe, démarrez avec $\frac{1}{z} = \frac{1}{z}\frac{\overline{z}}{\overline{z}}$.

a) Calculer $\bar{i}$, $\overline{i^2}$, $(\bar{i})^2$, $\frac{1}{i}$ (aussi noté i^{-1}).
b) Soit $z \in \mathbb{C}$. Décrire géométriquement le produit iz.
c) Soit $w = 1 + i$ et $z = 2 + 3i$. Calculer w/z (à mettre sous la forme $a + bi$).

Sol.:

a) On a $\bar{i} = -i$, $\overline{i^2} = \overline{-1} = -1$, $(\bar{i})^2 = (-i)^2 = -1$, et $\frac{1}{i} = \frac{1 \cdot i}{i \cdot i} = \frac{i}{-1} = -i$.
b)
$$\frac{w}{z} = \frac{1+i}{2+3i} = \frac{(1+i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{5-i}{13} = \frac{5}{13} - \frac{1}{13}i.$$
c) Si $z = a + bi$, alors $iz = -b + ai$. Géométriquement la transformation $(a, b) \to (-b, a)$ correspond à une rotation autour de l'origine ($0 \in \mathbb{C}$) et d'angle $\pi/2$.

Exercice 10

Calculer pour les matrices suivantes les valeurs propres et une base de chaque espace propre dans $\mathbb{C}^2$
$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Sol.:

A. Le polynôme caractéristique de A est $\lambda^2 - 6\lambda + 10$. Les valeurs propres de A sont $\lambda_{1,2} = 3 \pm i$. Les vecteurs propres correspondants sont $v_1 = \begin{pmatrix} 2+i \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 2-i \\ 1 \end{pmatrix}$.
B. Le polynôme caractéristique de B est $\lambda^2 - 8\lambda + 17$. Les valeurs propres de B sont $\lambda_{1,2} = 4 \pm i$. Les vecteurs propres correspondants sont $v_1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix}$.
C. Le polynôme caractéristique de C est $\lambda^2 - 8\lambda + 25$. Les valeurs propres de C sont $\lambda_{1,2} = 4 \pm 3i$. Les vecteurs propres correspondants sont $v_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$.