

Série 8 (Corrigé)

Cette série fait suite aux chapitres 4.6, 4.7, 5.1, 5.2 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay, aussi bien que certains concepts vus au cours.

Remarques : il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -15 & 1 & -9 \\ 0 & 6 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

- Est-ce que $\lambda = 6$ est une valeur propre de A ?
- Même question avec $\lambda = 1$ et $\lambda = -9$.

Sol.:

- En calculant $A - 6I_3$, on obtient une matrice dont la seconde ligne est nulle, donc une matrice non-inversible. Par conséquent, $\text{Ker}(A - 6I_3) \neq \{\vec{0}\}$ et 6 est une valeur propre.
- On calcule :

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} -16 & 1 & -9 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A + 9I_3 = \begin{pmatrix} -6 & 1 & -9 \\ 0 & 15 & 0 \\ 4 & 1 & 12 \end{pmatrix}.$$

Les déterminants de ces matrices (en développant par rapport à la deuxième ligne) sont respectivement $5 \cdot (-16 \cdot 2 + 4 \cdot 9)$ et $15 \cdot (-6 \cdot 12 + 4 \cdot 9)$. Ils sont non nuls, par conséquent ces matrices sont inversibles, et ni 1 ni -9 ne sont des valeurs propres.

Exercice 2

Le *polynôme caractéristique* d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la fonction $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$. Comme vous le constaterez, c'est en effet toujours un polynôme de degré n . Les valeurs propres de A sont exactement les racines de p_A .

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\text{et } E = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 17 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer le polynôme caractéristique, les valeurs propres et les vecteurs propres de chacune de ces matrices A, B, C, D, E .

Sol.:

A. Le polynôme caractéristique de A est $\lambda^2 - 5\lambda + 5$. Les valeurs propres de A sont $\left\{\frac{5+\sqrt{5}}{2}, \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Les vecteurs propres correspondants sont $\left\{\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}, 1\right), \left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}, 1\right)\right\}$.

B. Le polynôme caractéristique de B est $(\lambda - 4)^2$. Les valeurs propres de B sont $\{4, 4\}$ (il y a une seule valeur propre 4 de multiplicité 2). Vecteurs propres correspondants : $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

Remarque : l'espace propre est de dimension seulement 1 alors que la valeur propre est de multiplicité 2, la matrice n'est pas diagonalisable.

C. Le polynôme caractéristique de C est $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda - 4 = (\lambda - 4)(\lambda - 1)^2$. Les valeurs propres de C sont $\{4, 1, 1\}$ c-à-d les coefficients diagonaux de la matrice triangulaire. Les vecteurs

propres correspondants sont $\left\{\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

D. Le polynôme caractéristique de D est $-\lambda^3 + 36\lambda = -\lambda(\lambda + 6)(\lambda - 6)$. Les valeurs propres de D sont donc $\{-6, 0, 6\}$. Les vecteurs propres correspondants sont

$\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

E. Le polynôme caractéristique de E est $\lambda^4 - 10\lambda^3 + 35\lambda^2 - 50\lambda + 24 = (\lambda - 3)(\lambda - 4)(\lambda - 1)(\lambda - 2)$.

Les valeurs propres de E sont $\{3, 4, 1, 2\}$ c-à-d les coefficients diagonaux de la matrice triangulaire. Les vecteurs propres correspondants sont

$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 31 \\ -34 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 113 \\ -60 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Exercice 3

Soit A une matrice de taille $n \times n$ et $k \geq 2$ un entier. Montrer que si λ est une valeur propre de A avec pour vecteur propre \vec{v} , alors λ^k est une valeur propre de

$$A^k = \underbrace{A A \cdots A}_{k \text{ fois}}$$

avec pour vecteur propre \vec{v} .

Sol.: Par définition, on a $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$. Par récurrence sur k , on montre $A^k\vec{v} = \lambda^k\vec{v}$. Supposons le résultat vrai au rang $k - 1$, c-à-d $A^{k-1}\vec{v} = \lambda^{k-1}\vec{v}$. On a alors :

$$A^k\vec{v} = A(A^{k-1}\vec{v}) = A(\lambda^{k-1}\vec{v}) = \lambda^{k-1}A\vec{v} = \lambda^{k-1}\lambda\vec{v} = \lambda^k\vec{v}.$$

Ceci montre que le vecteur \vec{v} , non nul, est un vecteur propre de la matrice A^k associé à la valeur propre λ^k .

Exercice 4

- a) Montrer que si λ est une valeur propre d'une matrice inversible A de taille $n \times n$, alors λ^{-1} est une valeur propre de A^{-1} . Trouver un vecteur propre correspondant.
- b) Montrer que A et A^T ont les mêmes valeurs propres. Montrer par un contre-exemple que les vecteurs propres de A et A^T ne sont pas les mêmes en général.

Sol.:

- a) Si \vec{v} est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ , on a

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}.$$

La valeur propre λ est non nulle car la matrice A est inversible. On multiplie à gauche par $\lambda^{-1}A^{-1}$, et on obtient

$$\lambda^{-1}\vec{v} = A^{-1}\vec{v},$$

d'où le résultat.

- b) Le déterminant de la matrice $A - \lambda I_n$ étant égal au déterminant de la transposée $(A - \lambda I_n)^T = A^T - \lambda I_n$, les matrices A et A^T ont donc le même polynôme caractéristique, et donc les mêmes valeurs propres (qui sont les racines du polynôme caractéristique).

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$ et les vecteurs propres associés sont $\vec{v}_1 = (2 \ 1)^T, \vec{v}_2 = (-2 \ 1)^T$. Par contre les vecteurs propres correspondants de la matrice A^T sont $\vec{v}_1 = (1 \ 2)^T, \vec{v}_2 = (-1 \ 2)^T$.

Remarque : bien sûr, si A est symétrique, les vecteurs propres de A et A^T sont les mêmes.

Exercice 5

- a) Est-ce que $\lambda = 4$ est une valeur propre de la matrice : $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$? Si oui, trouver un vecteur propre pour cette valeur propre.
- b) Est-ce que $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 9 \\ -4 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$?
- c) Trouver une base de l'espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 3$ de la matrice $M = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix}$. Quelle est la dimension de cet espace propre?

Sol.:

- a) Le nombre $\lambda = 4$ est une valeur propre de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ si et seulement

si il existe un vecteur \vec{x} non nul tel que $A\vec{x} = 4\vec{x}$. Dans ce cas \vec{x} est un vecteur propre pour la valeur propre 4. Puisque $4\vec{x} = (4I_3)\vec{x}$, nous nous demandons en fait si la matrice $A - 4I_3$ a un noyau non nul. Il suffit donc d'échelonner cette matrice pour le vérifier.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi 4 est une valeur propre. On trouve par exemple comme vecteur propre

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- b) Pour qu'un vecteur \vec{x} soit vecteur propre de A , il doit satisfaire l'équation $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ pour une certaine valeur de λ . Ici, le produit $A\vec{x}$ donne

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Par conséquent, \vec{x} est un vecteur propre de A correspondant à la valeur propre $\lambda = 0$.

- c) L'espace propre correspondant à une valeur propre λ contient tous les vecteurs qui satisfont $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, c'est-à-dire $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$. L'espace propre est donc identique à $\text{Ker}(A - \lambda I)$. Pour trouver sa base, on exprime la solution de l'équation $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$ dans sa forme paramétrique. Ici, on trouve deux variables libres x_2 et x_3 et en réexprimant x_1 en fonction de ces deux variables libres, la forme paramétrique nous livre deux vecteurs de base pour la valeur propre $\lambda = 3$ donnés par

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La dimension du sous-espace propre correspondant à $\lambda = 3$ est donc égale à 2.

Exercice 6

Déterminer lesquelles, parmi les matrices suivantes, sont diagonalisables :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Sol.:

- A. Oui car A est déjà diagonale.
 B. Oui. Les valeurs propres de B sont $\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = 1$. Les valeurs propres de B sont distinctes, donc une famille avec un vecteur propre pour λ_1 et un vecteur propre pour λ_2 est linéairement indépendante, et constitue une base de \mathbb{R}^2 . Ainsi, B est diagonalisable.
 C. Oui. Les valeurs propres de C sont 4, 5, 5 (obtenues en cherchant les racines du polynôme caractéristique). Comme la valeur propre 5 est de multiplicité 2, il faut vérifier si la dimension de l'espace propre associé est aussi 2. On calcule :

$$C - 5I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les colonnes 1 et 3 sont proportionnelles, et la colonne 2 est nulle, d'où $\text{rang}(C - 5I_3) = 1$. Par conséquent, $\dim \text{Ker}(C - 5I_3) = 3 - 1 = 2$, et la matrice C est diagonalisable.

D. Oui. Le polynôme caractéristique de D est

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + 36\lambda = -\lambda(\lambda - 6)(\lambda + 6).$$

Les valeurs propres sont donc $0, -6, 6$. Elles sont distinctes donc D est diagonalisable.

Remarque : le théorème spectral stipule que toute matrice symétrique réelle est diagonalisable.

Exercice 7

Soit A la matrice 2×2 réelle donnée par

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Montrer que $\lambda = a \pm ib$ sont les valeurs propres de A .

Sol.: Le polynôme caractéristique de A est donné par $\lambda^2 - 2a\lambda + (a^2 + b^2)$. Donc les valeurs propres de A sont

$$\lambda_{1,2} = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 4(a^2 + b^2)}}{2} = a \pm \sqrt{-b^2} = a \pm bi.$$

Exercice 8

Soit A une matrice $n \times n$ réelle ou complexe et $x \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que μx est encore un vecteur propre de A pour tout $\mu \in \mathbb{C}$, $\mu \neq 0$. Si vous préférez, vous pouvez faire cet exercice en considérant A, x, λ et μ réels.

Sol.: Vu que λ est une valeur propre de A (avec x un vecteur propre), on constate que $A(\mu x) = \mu Ax = \mu \lambda x = \lambda(\mu x)$. Utilisant le fait que $\mu x \neq 0$, il s'ensuit que μx est aussi un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ .

Exercice 9

Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que 0 et 6 sont des valeurs propres de A et calculer les espaces propres associés.

Sol.: Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Comme la somme des coefficients de chaque ligne vaut 6,

on a que $6 = 1 + 2 + 3$ est une valeur propre. Un vecteur propre est par exemple $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Celui-ci forme une base de E_6 .

D'autre part le rang de cette matrice vaut 1 car toutes les colonnes sont proportionnelles. Par conséquent le noyau est de dimension 2 par le Théorème du rang ce qui signifie que 0 est une

valeur propre. L'espace propre E_0 est donc de dimension 2 : $E_0 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}$ dont une base est donnée par $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 10

Existe-t-il une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $b \neq 0$, diagonalisable et ne possédant qu'une seule valeur propre de multiplicité 2?

Sol.: Non. En effet, soit A une matrice diagonalisable avec une seule valeur propre λ de multiplicité 2. Diagonalisons la matrice : il existe P inversible telle que

$$A = PDP^{-1}$$

avec $D = \lambda I_2$. On déduit $A = \lambda P I_2 P^{-1} = \lambda P P^{-1} = \lambda I_2$. La matrice A est donc proportionnelle à la matrice identité, elle ne peut pas être de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $b \neq 0$.