Série 7 (Corrigé)

Cette série fait suite aux chapitres 4.3, 4.4, 4.5 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay.

Remarques : il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.

Exercice 1

a) Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel W de $\mathbb{R}^2$ donné par $W = \text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ où $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Trouver un sous-ensemble B de $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ tel que B soit une base de W.

c) Agrandir l'ensemble $\{\vec{v}_1 + \vec{v}_2\} \subset W$ pour obtenir une base de W.

Sol.:

a) Deux. En effet, les vecteurs $\vec{v}_2, \vec{v}_3$ sont linéairement indépendants, donc la dimension est au moins deux. Elle est inférieure ou égale à 2 car c'est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$.

b) $B = \{\vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ — c'est la base canonique de $\mathbb{R}^2$. (Note : $\{\vec{v}_1, \vec{v}_3\}$ et $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ sont aussi possibles).

c) L'espace W est de dimension deux, donc n'importe quel vecteur non colinéaire à $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ convient. Par exemple, on peut proposer la base $\{\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_1\}$ de W.

Exercice 2

Trouver la dimension du sous-espace H défini par :

$$H = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \vec{x} = \begin{pmatrix} a - 3b + 6c \\ 5a + 4d \\ b - 2c - d \\ 5d \end{pmatrix}, \text{ où } a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

Sol.: Par construction, H est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ défini comme $\text{Vect}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ avec

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

On voit que $\vec{v}_3 = -2\vec{v}_2$, ce qui est équivalent à dire que $H = \text{Vect}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4\}$. En vérifiant que ces trois vecteurs sont linéairement indépendants (en calculant la forme échelonnée de la matrice dont les colonnes sont $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4$ par exemple), on peut déduire que H est de dimension 3.

Exercice 3

On considère la transformation $T : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_2$ définie par

$$T(a + bt + ct^2 + dt^3) = (a + b + c + d) + (a + b)t + (c + d)t^2.$$

a) Vérifier que T est linéaire.
b) Trouver la dimension et une base de $\text{Im}T$.
c) Vérifier que le polynôme $7 + 5t + 2t^2$ est bien dans l'image de T et donner ses coordonnées dans la base trouvée en (b).
d) Trouver la dimension et une base de $\text{Ker}T$.
e) Vérifier que le polynôme $2 - 2t - 5t^2 + 5t^3$ est bien dans le noyau de T et donner ses coordonnées dans la base trouvée en (d).

Sol.: Par rapport aux bases canoniques $\{1, t, t^2, t^3\}$ de $\mathbb{P}_3$ et $\{1, t, t^2\}$ de $\mathbb{P}_2$, la matrice associée à l'application linéaire T est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc l'image de T est un sous-espace de $\mathbb{P}_2$ de dimension 2 avec base $\mathcal{B}_{\text{Im}} = \{1 + t, 1 + t^2\}$ et le noyau de T est un sous-espace de $\mathbb{P}_3$ de dimension 2 avec base $\mathcal{B}_{\text{Ker}} = \{1 - t, t^2 - t^3\}$.
Le polynôme $7+5t+2t^2$ est bien dans l'image de T puisque - par exemple - $T(5+2t^2) = 7+5t+2t^2$. Ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}_{\text{Im}}$ sont $(7 + 5t + 2t^2)_{\mathcal{B}_{\text{Im}}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, puisque

$$7 + 5t + 2t^2 = 5(1 + t) + 2(1 + t^2).$$

Le polynôme $2 - 2t - 5t^2 + 5t^3$ est bien dans le noyau de T puisque $T(2 - 2t - 5t^2 + 5t^3) = 0$. Ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}_{\text{Ker}}$ sont $(2 - 2t - 5t^2 + 5t^3)_{\mathcal{B}_{\text{Ker}}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, puisque

$$2 - 2t - 5t^2 + 5t^3 = 2(1 - t) - 5(t^2 - t^3).$$

Exercice 4

Soit $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices 2×2 à coefficients réels.

1. Soit $V = \{M \in \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R}) \mid M \text{soit inversible}\}$. Alors
   - ☐ V est un sous-espace vectoriel de $M_{2\times2}$
   - ☐ V est un espace vectoriel.
   - ☐ V n'est pas un espace vectoriel.

☐ V est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des matrices inversibles.

2. Soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Alors

   ☐ $[M]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ☐ $[M]_E = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

   ☐ $[M]_E = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ☐ $[M]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

3. Quelle famille ci-dessous est une base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

   ☐ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

   ☐ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

   ☐ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

   ☐ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

Sol.:

1. V n'est pas un sous-espace vectoriel
2. $[M]_E = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
3. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

Exercice 5

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

	V	F
a) Le plan défini dans $\mathbb{R}^3$ par $z = 2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.	☐	☐
b) $\mathrm{Ker}(A) = \{\overrightarrow{0}\}$ si et seulement si l'application $\overrightarrow{x} \mapsto A\overrightarrow{x}$ est surjective.	☐	☐
c) Soit V un espace vectoriel et $u \in V$. Alors l'opposé $-u$ de u est unique et $-u = (-1)u \in V$.	☐	☐
d) Soit A une matrice de taille $m \times n$, alors $\mathrm{Ker}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.	☐	☐

Sol.: Vrai : (c), (d). Faux : (a), (b).

a) Faux. En effet le vecteur nul n'appartient pas à ce plan.

b) Faux. On a que $\mathrm{Ker}(A) = \{\overrightarrow{0}\}$ si et seulement si l'application $\overrightarrow{x} \mapsto A\overrightarrow{x}$ est injective et non pas surjective

c) Vrai. Supposons qu'il existe $u', u'' \in V$ tels que $u + u' = 0 = u' + u$ et $u + u'' = 0 = u'' + u$. On a alors que $u' = u' + 0 = u' + (u + u'') = (u' + u) + u'' = 0 + u'' = u''$. Donc l'oppose de u est unique, et on le note $-u$. Dès lors, par les propriétes d'espace vectoriel on a $(-1)u + u = (-1)u + 1u = (-1 + 1)u = 0u = 0$. PAr unicité de l'opposé on obtient que $(-1)u = -u$.

d) Vrai. En effet, si $u, v \in \mathrm{Ker}(A)$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $A(u + \lambda v) = Au + \lambda Av = 0$ et donc $u + \lambda v \in \mathrm{Ker}(A)$.

Exercice 6

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 9 & -7 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 5 & -6 & 10 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que les matrices A et B sont équivalentes (selon les lignes). (**Indication :** quelle est la forme échelonnée et réduite des deux matrices ?)

b) Calculer le rang de A et $\dim(\mathrm{Ker}A)$.

c) Trouver une base pour chacun des sous-espaces $\mathrm{Im}A$, $\mathrm{Ker}A$ et $\mathrm{Ker}A^T$, ainsi que du sous-espace $\mathrm{Lgn}(A)$ engendré par les lignes de A.

Sol.:

a) On constate que la forme échelonnée réduite des deux matrices est la même, elles sont donc équivalentes.

b) En analysant la matrice B on remarque alors que :

Il y a deux colonnes indépendantes ce qui donne $\mathrm{rang}A = 2$ (le rang est le nombre de colonnes-pivot) et une base de $\mathrm{Im}A$ peut être formée par les deux premières colonnes de A qui correspondent aux colonnes-pivot de sa forme échelonnée. Par le Théorème du rang on trouve $\mathrm{dimKer}A = 4 - \mathrm{rang}A = 2$.

c) Trouvons les bases.

Base de Ker(A) : L'équation $A\overrightarrow{x} = 0$ est équivalente à $B\overrightarrow{x} = 0$; une base de $\mathrm{Ker}A$ est donnée par exemple par : $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et donc $\dim \mathrm{Ker}A = 2$, ce qui confirme le calcul effectué ci-dessus.

Base de Lgn(A) : Une base du sous-espace engendré par les lignes de A est donnée par les lignes non nulles de la forme échelonnée B :

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}\right)$$

Base de Im(A) et Ker(A) : Enfin ImA coïncide avec le sous-espace engendré par les lignes de A^T. Puisqu'il est de dimension 2, le Théorème du rang nous apprend que le noyau de A^T est de dimension $3-2=1$. On trouve que KerA^T est engendré par $\begin{pmatrix}2\\7\\1\end{pmatrix}$.

Exercice 7

On considère la transformation $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$T(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(0) \end{pmatrix}$$

a) Vérifier que T est linéaire.
b) Trouver la dimension et une base de ImT.
c) Appliquer le Théorème du rang pour trouver la dimension du noyau de T.
d) Vérifier le résultat de c) en trouvant une base de Ker$T$.

Sol.: L'application T est linéaire puisque chacune des composantes de $T(p+q)$ est égale à $(p+q)(0) = p(0) + q(0)$, par définition de la somme de polynômes. De même $(\alpha p)(0) = \alpha \cdot p(0)$ pour tout nombre réel α, ce qui montre la compatibilité de T avec l'action.

L'image de T est constituée de tous les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ de la forme $\begin{pmatrix} p(0) \\ p(0) \end{pmatrix}$. Leurs deux composantes sont égales et elles peuvent être non nulles (il suffit de choisir le polynôme constant 1 pour obtenir le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi l'image de T est de dimension un, une base est donnée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Par le Théorème du rang, le noyau est donc de dimension $\dim \mathbb{P}_2 - 1 = 3 - 1 = 2$. Pour terminer il nous suffit de comprendre quels sont les polynômes p qui sont envoyés sur zéro par T. Ce sont tous ceux pour lesquels $p(0) = 0$, ce qui signifie que le coefficient constant est nul. Autrement dit

$$\text{Ker}T = \{bt + ct^2 \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\{t, t^2\}$$

Une base du noyau est ainsi donnée par (t, t^2).

Exercice 8

a) Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -19 \\ 0 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$ sont équivalentes.
b) Calculer rang(A), dim(Ker$A$), rang(B), dim(Ker$B$).
c) Trouver une base de Ker$A$ et Ker$B$.

Sol.:

a) En échelonnant/réduisant la matrice A par des opérations élémentaires sur les lignes, on obtient la matrice B.
b) La matrice B est sous forme échelonnée réduite, on peut donc lire $\text{rang}(B) = 3$ (trois pivots) et $\dim \text{Ker}B = 1$. Comme A et B sont équivalentes d'après a), on a $\text{rang}(A) = \text{rang}(B) = 3$ et $\dim \text{Ker}A = \dim \text{Ker}B = 1$.
c) Comme B est la forme échelonnée réduite de A, on a $\text{Ker}A = \text{Ker}B$, et une base de $\text{Ker}B$ est aussi une base de $\text{Ker}A$. $\text{Ker}B$ est l'espace des solutions de $B\vec{x} = \vec{0}$, de dimension 1. On obtient ainsi la base $\left\{ \begin{pmatrix} 19 \\ -11 \\ \frac{7}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Exercice 9

Soit $\vec{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire donnée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x_1 + x_3 \\ 2x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

Soient E la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et B une base de $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

a) Donner la matrice M qui représente T par rapport aux bases E (de départ) et B (d'arrivée).
b) Même question pour les bases B (de départ) et E (d'arrivée).
c) Même question pour les bases B (de départ) et B (d'arrivée).

Sol.: Deux versions : une sans utiliser la théorie sur le changement de base, et une avec.

Sans utiliser la théorie sur le changement de base

a) On note $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ les vecteurs de la base canonique E de $\mathbb{R}^3$. Par définition, la matrice canonique de l'application T est

$$\left([T(\vec{e}_1)]_E \quad [T(\vec{e}_2)]_E \quad [T(\vec{e}_3)]_E \right).$$

On cherche

$$M = \left([T(\vec{e}_1)]_B \quad [T(\vec{e}_2)]_B \quad [T(\vec{e}_3)]_B \right).$$

On va donc chercher les vecteurs cordonnées de $T(\vec{e}_1)$, $T(\vec{e}_2)$ et $T(\vec{e}_3)$ par rapport à la base B. On note $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ les vecteurs de la base B. Commençons par $T(\vec{e}_1)$. On cherche l'unique vecteur $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$ tel que $T(\vec{e}_1) = r_1 \vec{b}_1 + r_2 \vec{b}_2 + r_3 \vec{b}_3$, i.e.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = [T(\vec{e}_1)]_B. \tag{1}$$

De façon similaire, on obtient

$$[T(\overrightarrow{e}_2)]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad [T(\overrightarrow{e}_3)]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) On procède de manière identique pour expliciter

$$M = \Big([T(\overrightarrow{b}_1)]_E \quad [T(\overrightarrow{b}_2)]_E \quad [T(\overrightarrow{b}_3)]_E \Big) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ici les 3 systèmes à résoudre sont très simples car ils font intervenir la matrice identité (matrice dont les colonnes sont les vecteurs de la base canonique E).

c) La matrice M recherchée est ici donnée par

$$M = \Big([T(\overrightarrow{b}_1)]_B \quad [T(\overrightarrow{b}_2)]_B \quad [T(\overrightarrow{b}_3)]_B \Big).$$

Les 3 systèmes à résoudre font intervenir la même matrice qu'en (**??**). On obtient

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

En utilisant la théorie sur le changement de base

a) On commence par prendre les vecteurs de la base de départ et à leur appliquer la transformation T. On obtient

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

qui sont encore exprimés dans la base canonique E. Il faut maintenant calculer la matrice de passage de la base E à la base B, notée P_{BE} (telle que $[\overrightarrow{x}]_B = P_{BE}[\overrightarrow{x}]_E$). On sait, du cours, que cette matrice est l'inverse de la matrice de passage de la base B à la base E, notée P_{EB}. Cette dernière est donnée par

$$P_{EB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

i.e. ses colonnes sont les vecteurs de la base B, exprimés dans la base E. Pour calculer son inverse, on peut utiliser la méthode vue en cours (avec l'identité à droite), ou calculer directement son inverse en résolvant $P_{EB}P_{EB}^{-1} = I_3$, où l'on pose

$$P_{EB}^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

On résout
$$\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$
Comme la matrice P_{EB} contient beaucoup de zéros, il sera plus simple de résoudre le système d'équations obtenu que d'utiliser la méthode vue en cours. On obtient facilement que l'inverse est
$$P_{EB}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&-1&0\\-1&1&1\end{pmatrix}=P_{BE}.$$
On applique alors P_{BE} aux vecteurs obtenus précédemment (qui sont exprimés dans la base E). La matrice M est
$$M=\left([P_{BE}\overrightarrow{T}(\overrightarrow{e}_1)]\quad[P_{BE}\overrightarrow{T}(\overrightarrow{e}_2)]\quad[P_{BE}\overrightarrow{T}(\overrightarrow{e}_3)]\right)=\begin{pmatrix}0&2&1\\3&-2&0\\-2&3&0\end{pmatrix}.$$

b) On commence par prendre les vecteurs de la base de départ et à leur appliquer la transformation T.
$$T\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix},\quad T\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix},\quad T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},$$
qui sont exprimés dans la base canonique E. La matrice M est
$$M=\begin{pmatrix}3&4&1\\2&1&1\\2&1&0\end{pmatrix}.$$

Variante en utilisant la définition de la matrice associée à T. On sait que $T(\overrightarrow{b_i})=A\overrightarrow{b_i}$ avec $A=([T(\overrightarrow{e_1})]_E\quad[T(\overrightarrow{e_2})]_E\quad[T(\overrightarrow{e_3})]_E)$. Ainsi on peut trouver les colonnes de notre matrice cherchée en résolvant
$$([T(\overrightarrow{e_1})]_E\quad[T(\overrightarrow{e_2})]_E\quad[T(\overrightarrow{e_3})]_E)([\overrightarrow{b_1}]_E\quad[\overrightarrow{b_2}]_E\quad[\overrightarrow{b_3}]_E)=(T(\overrightarrow{b_1})\quad T(\overrightarrow{b_2})\quad T(\overrightarrow{b_3}))$$

c) On applique P_{BE} aux vecteurs obtenus au point précédent et on obtient la matrice
$$M=\left([P_{BE}\overrightarrow{T}(\overrightarrow{b}_1)]\quad[P_{BE}\overrightarrow{T}(\overrightarrow{b}_2)]\quad[P_{BE}\overrightarrow{T}(\overrightarrow{b}_3)]\right)=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&3&0\\1&-2&0\end{pmatrix}.$$

Exercice 10

Soit $A=\begin{pmatrix}1&0&2&3\\1&1&1&0\\0&0&0&3\end{pmatrix}$.

a) Déterminer le rang de A et la dimension du noyau de A.
b) Même question pour A^T.
c) On suppose qu'une matrice A de taille 7×7 possède un pivot dans chaque ligne. Quel est le rang de A ? Quelle est la dimension du noyau de A ?

d) On considère une matrice A de taille $m \times n$ et un vecteur $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^m$. Quelle doit être la relation entre le rang de $[\, A \ \ \overrightarrow{b}\,]$ et le rang de A pour que l'équation $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ soit compatible ?

Sol.:

a) Les colonnes 1, 2 et 4 forment une base de $\mathbb{R}^3$, donc $\text{rg}(A) = 3$. Par le théorème du rang, on a
$$\dim \text{Ker}\, A = (\text{nombre de colonnes de } A) - \text{rg}(A) = 4 - 3 = 1.$$

b) $\text{rg}(A^T) = \text{rg}(A) = 3$.
$$\dim \text{Ker}\, A^T = (\text{nombre de colonnes de } A^T) - \text{rg}(A^T) = 3 - 3 = 0.$$

c) A est équivalente à la matrice identité de taille 7×7, ainsi $\text{rg}(A) = 7$ et $\dim \text{Ker}\, A = 0$.

d) $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ est compatible $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{b}$ est une combinaison linéaire des colonnes de A $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{b} \in \text{Col}\, A$ $\Leftrightarrow$ $\text{rg}(A) = \text{rg}([\, A \ \ \overrightarrow{b}\,])$.

Exercice 11

a) Soit A une matrice 5×6. Si $\dim(\text{Ker}A) = 3$, quel est le rang de A ?

b) Soit A une matrice 7×3. Quel est le rang maximum de A ? Quelle est la dimension minimum de $\text{Ker}A$? Même question si A est une matrice 3×7.

c) Soit A une matrice $n \times n$. Donner une condition sur $\text{rang}(A)$ pour que A^T soit inversible.

d) Soit $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une transformation linéaire telle que $T \circ T \circ T = I_3$ (l'application identité). Quelle est la dimension de $\text{Ker}T$?

Sol.:

a) On considère l'application linéaire associée de $\mathbb{R}^6$ dans $\mathbb{R}^5$. Le théorème du rang donne
$$\text{rang}(A) + \dim \text{Ker}A = 6 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3.$$

b) Si A est de taille 7×3, alors $\text{rang}(A) + \dim \text{Ker}A = 3$. Le rang maximum est 3 et la dimension minimum du noyau est 0.

Si A est de taille 3×7 , le rang maximum est 3. Comme $\text{rang}(A) + \dim \text{Ker}A = 7$, la dimension minimum du noyau est 4.

c) A^T est inversible $\Leftrightarrow$ A est inversible $\Leftrightarrow$ $\text{rang}(A) = n$.

d) On a
$$3 = \text{rang}(I_3) = \text{rang}(T \circ T \circ T).$$
Ainsi, $\text{Ker}(T \circ T \circ T) = \{\overrightarrow{0}\}$. Comme
$$\overrightarrow{v} \in \text{Ker}T \Rightarrow \overrightarrow{v} \in \text{Ker}(T \circ T \circ T),$$
on obtient $\dim \text{Ker}T = 0$.

Exercice 12

Soient $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ et $C = \{\vec{c}_1, \vec{c}_2\}$ deux bases de $\mathbb{R}^2$. On suppose $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Donner la matrice de changement de base (matrice de passage) de la base C vers la base B.

b) Donner la matrice de changement de base (matrice de passage) de la base B vers la base C.

c) Si $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ est tel que $[\vec{v}]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, calculer $[\vec{v}]_C$.

d) À présent, si $[\vec{v}]_C = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}$, calculer $[\vec{v}]_B$.

Sol.:

a) P_{BC} est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de $\vec{c}_1$ et $\vec{c}_2$ dans la base B : $P_{BC} = ([\vec{c}_1]_B\, [\vec{c}_2]_B)$. Il faut donc résoudre deux sytèmes linéaires afin de trouver $[\vec{c}_i]_B$, $i = 1, 2$:

$$\vec{c}_i = x_{1i}\vec{b}_1 + x_{2i}\vec{b}_2 = (\vec{b}_1 \quad \vec{b}_2)\begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, P_{BC} est la solution de

$$(\vec{b}_1 \quad \vec{b}_2)P_{BC} = (\vec{c}_1 \quad \vec{c}_2).$$

Si on désigne par E la base canonique, cela peut aussi être interprété comme $P_{EB}P_{BC} = P_{EC}$. Pour résoudre ce système linéaire, on échelonne et on réduit la matrice $(\vec{b}_1 \quad \vec{b}_2)$ augmentée avec les vecteurs $\vec{c}_1$ et $\vec{c}_2$:

$$(\vec{b}_1 \quad \vec{b}_2 | \vec{c}_1 \quad \vec{c}_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -8 \end{array}\right).$$

Ainsi, la matrice de passage cherchée est $P_{BC} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}$.

b) On a $P_{CB} = P_{BC}^{-1}$, d'où la matrice cherchée est $P_{CB} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} \end{pmatrix}$.

c) $[\vec{v}]_C = P_{CB}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

d) $[\vec{v}]_B = P_{BC}\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \end{pmatrix}$.
