Série 6 (Corrigé)

Remarques : il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver une base de $\operatorname{Ker}(A)$ et de $\operatorname{Im}(A)$.

Sol.: On note $A = (\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3, \overrightarrow{v}_4)$, avec $(\overrightarrow{v}_i)_{1\leqslant i\leqslant 4}$ colonnes de A. Les vecteurs $\overrightarrow{v}_2$ et $\overrightarrow{v}_3$ sont proportionnels à $\overrightarrow{v}_1$, donc ils sont superflus pour trouver une base de $\operatorname{Im}(A)$. Les vecteurs $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_4$ sont linéairement indépendants, ils constituent une base de $\operatorname{Im}(A)$.

L'espace $\operatorname{Ker}(A)$ est constitué des vecteurs $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ tels que $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$. On a

$$A\overrightarrow{x} = x_1\overrightarrow{v}_1 + x_2\overrightarrow{v}_2 + x_3\overrightarrow{v}_3 + x_4\overrightarrow{v}_4 = (x_1 + 2x_2 + 3x_3)\overrightarrow{v}_1 + x_4\overrightarrow{v}_4,$$

ainsi $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ ssi $x_4 = 0$ et $x_1 = -2x_2 - 3x_3$. Par conséquent, x_2 et x_3 sont des variables libres du système linéaire $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$. On obtient une base de $\operatorname{Ker}(A)$ en choisissant successivement $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, puis $x_2 = 0$, $x_3 = 1$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Exercice 2

Soit $\mathbb{P}_2$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 2. Parmi les quatre sous-ensembles de $\mathbb{P}_2$ ci-dessous, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{P}_2$

$$\begin{aligned}
E_1 &= \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, a_0 = a_2^2\} \\
E_2 &= \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, p(0) = 1\} \\
E_3 &= \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, p'(t) = 0\} \\
E_4 &= \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, a_0 = a_1 = a_2\}
\end{aligned}$$

Sol.: E_1 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{P}_2$ car il n'est pas stable sous l'addition : si

$p(t), q(t) \in E_1$ alors $p(t) = a_0 + a_1 + a_2t^2$, $q(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2$ avec $a_0 = a_2^2$ et $b_0 = b_2^2$

$$p(t) + q(t) = a_2^2 + a_1t + a_2t^2 + b_2^2 + b_1t + b_2t^2 = (a_2^2 + b_2^2) + (a_1 + b_1)t + (a_2 + b_2)t^2.$$

et comme $(a_2^2 + b_2^2) \neq (a_2 + b_2)^2$, $p(t) + q(t) \notin E_1$

E_2 n'est pas un sous-espace vecoriel de $\mathbb{P}_2$ car le polyôme nul n'est pas dans E_2, car il ne vérifie pas $p(0) = 1$. En effet les polynômes de E_2 sont de la forme $p(t) = 1 + a_1t + a_2t^2$ (comme cela quand $t = 0$ on a $p(0) = 1$).

Les deux derniers sont des sous-espaces vectoriels car ils vérifient les 3 axiomes.

Exercice 3

Soit $\mathbb{P}_2$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2, dont on admet que c'est un espace vectoriel. On considère la transformation $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $T(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(0) \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que T est linéaire.
b) Trouver une base de $\operatorname{Ker} T$.
c) Trouver une base de $\operatorname{Im} T$.

Sol.:

a) Pour tous $p_1, p_2, p \in \mathbb{P}_2$ et $c \in \mathbb{R}$, on a :

$$T(p_1 + p_2) = \begin{pmatrix} p_1(0) + p_2(0) \\ p_1(0) + p_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1(0) \\ p_1(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_2(0) \\ p_2(0) \end{pmatrix} = T(p_1) + T(p_2).$$

$$T(cp) = \begin{pmatrix} cp(0) \\ cp(0) \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} p(0) \\ p(0) \end{pmatrix} = cT(p).$$

b) $T(p) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} p(0) \\ p(0) \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow p(0) = 0$. Considérons un polynôme $p \in \mathbb{P}_2$ de la forme $p(t) = c_2t^2 + c_1t + c_0$. On a $p(0) = 0 \Leftrightarrow c_0 = 0 \Leftrightarrow p(t) = c_2t^2 + c_1t$. Ainsi, une base de $\operatorname{Ker} T$ est $\{t, t^2\}$.

c) Soit p de la forme $p(t) = c_2t^2 + c_1t + c_0$. L'image $\operatorname{Im} T$ est l'ensemble des vecteurs $T(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = c_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, une base de $\operatorname{Im} T$ est le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4

Soient V et W deux espaces vectoriels, T une transformation linéaire : $T : V \to W$ et $\{v_1, \ldots, v_p\}$ un sous-ensemble de V.

a) Montrer que si l'ensemble $\{v_1, \ldots, v_p\}$ est linéairement dépendant alors l'ensemble $\{T(v_1), \ldots, T(v_p)\}$ est linéairement dépendant.
b) Supposons que la transformation T est injective, c'est-à-dire que $T(u) = T(v) \Rightarrow u = v$. Montrer que si l'ensemble $\{v_1, \ldots, v_p\}$ est linéairement indépendant alors l'ensemble $\{T(v_1), \ldots, T(v_p)\}$ est linéairement indépendant.

Sol.:

a) Si $\{v_1, \ldots, v_p\}$ sont linéairement dépendants, alors il existe des nombres réels $c_1, \ldots, c_p$, non tous nuls, tels que :
$$c_1 v_1 + \ldots + c_p v_p = 0.$$
Puisque T est linéaire,
$$T(c_1 v_1 + \ldots + c_p v_p) = T(0) = 0 \quad \text{et} \quad c_1 T(v_1) + \ldots + c_p T(v_p) = 0.$$
Comme les c_i ne sont pas tous nuls, $\{T(v_1), \ldots, T(v_p)\}$ sont linéairement dépendants.

b) On suppose que $\{v_1, \ldots, v_p\}$ sont linéairement indépendants. Pour montrer que $\{T(v_1), \ldots, T(v_p)\}$ sont linéairement indépendants, considérons une combinaison linéaire donnant le vecteur nul :
$$c_1 T(v_1) + \ldots + c_p T(v_p) = 0.$$
Puisque T est linéaire et que $0 = T(0)$, on peut écrire cela sous la forme suivante :
$$T(c_1 v_1 + \ldots + c_p v_p) = T(0).$$
Par hypothèse, T est injective, donc cette équation implique que $c_1 v_1 + \ldots + c_p v_p = 0$. Puisque les vecteurs $\{v_1, \ldots, v_p\}$ sont linéairement indépendants, on conclut que $c_1 = \cdots = c_p = 0$.

Exercice 5

Répondre aux questions ci-dessous pour chacune des matrices suivantes :
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 8 & -4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ -6 & 2 & 4 \\ 9 & -7 & -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ -6 & 3 & 0 & -7 \\ 4 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Les colonnes sont-elles linéairement indépendantes ou linéairement dépendantes ?
2. Les colonnes engendrent-elles $\mathbb{R}^3$?

Sol.: Les colonnes d'une matrice sont linéairement indépendantes si et seulement si une forme échelonnée de la matrice possède un pivot dans chaque colonne.

Les colonnes d'une matrice $m \times n$ engendrent $\mathbb{R}^m$ si et seulement si une forme échelonnée de la matrice possède un pivot dans chaque ligne.

On calcule une forme échelonnée des matrices A, B et C, puis on en déduit que

a) les colonnes de A sont linéairement indépendantes et n'engendrent pas $\mathbb{R}^3$,
b) les colonnes de B sont linéairement dépendantes et n'engendrent pas $\mathbb{R}^3$,
c) les colonnes de C sont linéairement dépendantes et engendrent $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6

Vous pouvez ignorer la partie (c).

a) Soit W l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ vérifiant l'équation $x - y + z = 0$. Trouver une application linéaire $\psi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dont W est le noyau, puis donner une base de ce sous-espace.

b) Soit U le sous-ensemble des polynômes p de $\mathbb{P}_2$ vérifiant $p(1) = 0$. Trouver une application linéaire $\varphi\colon \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}$ dont U est le noyau, puis donner une base de ce sous-espace.

c) Construire un isomorphisme $F\colon U \to W$. On pourra utiliser la notion de coordonnées pour comparer U avec $\mathbb{R}^2$, puis $\mathbb{R}^2$ avec W.

Sol.:

a) L'ensemble des vecteurs appartenant à ce plan W forme un sous espace de $\mathbb{R}^3$ puisqu'il s'agit du noyau de l'application linéaire $\psi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $\psi(x, y, z) = x - y + z$.

On écrit la forme paramétrique d'un vecteur $\vec{w}$ de ce plan en choisissant les inconnues secondaires y et z comme paramètres (s et t) :

$$\vec{w} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

où s, t sont des réels quelconques. On en déduit qu'un ensemble générateur (non unique) du plan est formé par les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ces deux vecteurs sont linéairement indépendants puisqu'ils correspondent au choix des valeurs $s = 1$, $t = 0$ d'une part et $s = 0$, $t = 1$ d'autre part. Ils forment donc une base de W.

b) L'ensemble des polynômes appartenant à U forme un sous espace de $\mathbb{P}^2$ puisqu'il s'agit du noyau de l'application linéaire $\varphi\colon \mathbb{P}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(p) = p(1)$.

Un polynôme $p = a + bt + ct^2$ de $\mathbb{P}^2$ appartient à U s'il satisfait $p(1) = a + b + c = 0$. En choisissant les inconnues secondaires b et c comme paramètres (α et β), on peut écrire tout polynôme p de U comme combinaison

$$p = \alpha(t - 1) + \beta(t^2 - 1),$$

où α, β sont des réels quelconques. On en déduit qu'un ensemble générateur (non unique) de U est formé par les polynômes

$$t - 1 \qquad \text{et} \qquad t^2 - 1.$$

Ces deux polynômes sont linéairement indépendants puisqu'ils correspondent au choix des valeurs $\alpha = 1$, $\beta = 0$ d'une part et $\alpha = 0$, $\beta = 1$ d'autre part. Ils forment donc une base de U.

c) On peut définir $F\colon U \to W$ comme la composée de l'application

$$U \to \mathbb{R}^2, \qquad \alpha(t - 1) + \beta(t^2 - 1) \mapsto \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

et de l'application

$$\mathbb{R}^2 \to W, \qquad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \mapsto \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ces deux applications sont bijectives, car elles correspondent à des applications qui donnent les coordonnées d'un polynôme/vecteur dans une base donnée. Ainsi F est un isomorphisme.

On peut aussi construire l'isomorphisme directement :

$$F\colon U \to W, \qquad a + bt + ct^2 \mapsto \begin{pmatrix} a \\ -b \\ c \end{pmatrix}.$$

C'est bien défini, car si $a+b+c = 0$, alors $\begin{pmatrix} a \\ -b \\ c \end{pmatrix}$ appartient à W. Vérifier que F est bijective.

Exercice 7

On se donne une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad \text{et} \quad [x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

où $[x]_{\mathcal{B}}$ désigne le vecteur des coordonnées du vecteur x dans cette base. Trouver le vecteur $\overrightarrow{x}$ (c'est-à-dire ses coordonnées dans la base standard). Trouver les coordonnées $[y]_{\mathcal{B}}$ du vecteur

$$\overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} 10 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sol.: Les coordonnées $[x]_{\mathcal{B}}$ de x dans la base $\mathcal{B}$ sont les coefficients de l'écriture de x comme combinaison linéaire des vecteurs de base b_1, b_2 et b_3.

Par conséquent, nous avons ici $[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, ce qui signifie que

$$\overrightarrow{x} = 3\overrightarrow{b}_1 + 0 \cdot \overrightarrow{b}_2 - \overrightarrow{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Ensuite on nous donne $\overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} 10 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base standard, et il s'agit de trouver les coordonnées de $\overrightarrow{y}$ par rapport à la nouvelle base $\mathcal{B}$. C'est le calcul inverse du précédent. On cherche des nombres réels a, b et c tels que $a\overrightarrow{b}_1 + b\overrightarrow{b}_2 + c\overrightarrow{b}_3 = \overrightarrow{y}$. Pour trouver a, b et c il suffit de résoudre un système de trois équations à trois inconnues. Le résultat est $[\overrightarrow{y}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 8

a) On considère le vecteur $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ exprimé dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Trouver les coordonnées de $\overrightarrow{v}$ dans la base $(\overrightarrow{b}_1, \overrightarrow{b}_2)$ de $\mathbb{R}^2$, où $\overrightarrow{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Même question pour $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ donné dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à exprimer dans la base $(\overrightarrow{b}_1, \overrightarrow{b}_2, \overrightarrow{b}_3)$ donnée par $\overrightarrow{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Sol.:

a) Les coordonnées cherchées sont (c_1, c_2) avec $\overrightarrow{v} = c_1\overrightarrow{b}_1 + c_2\overrightarrow{b}_2$:
$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, on trouve $c_1 = 2$, $c_2 = -1$.

b) On résout $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{v}$ et on obtient $c_1 = -1$, $c_2 = 3$, $c_3 = 2$.

Exercice 9

Soit $B = (1 - 3t^2, 2 + t - 5t^2, 1 + 2t)$.

a) Vérifier que B est une base de $\mathbb{P}_2$, l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

b) Déterminer la matrice de passage de la base B vers la base canonique $\{t \mapsto 1, t \mapsto t, t \mapsto t^2\}$.

c) Écrire $t \mapsto t^2$ comme combinaison linéaire des vecteurs de B.

Sol.:

a) Écrivons la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de B dans la base canonique de $\mathbb{P}_2$, $(1, t, t^2)$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice de déterminant 1 est inversible. Les trois vecteurs de B sont donc linéairement indépendants, et la dimension de $\mathbb{P}_2$ est 3. Par conséquent, B est une base de $\mathbb{P}_2$. La matrice P est en fait la matrice de passage de la base B vers la base canonique.

b) La matrice P du a).

c) Les coordonnées de $t \mapsto t^2$ dans la base canonique sont $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Par définition de la matrice de passage P du b), les coordonnées de $t \mapsto t^2$ dans la base B sont donc la solution du système

$$P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On résout : $x = 3, y = -2, z = 1$.

Exercice 10

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble formé des quatre premiers polynômes de Hermite :

$$\mathcal{F} = (1, 2t, -2 + 4t^2, -12t + 8t^3).$$

a) Montrer que $\mathcal{F}$ forme une base de $\mathbb{P}_3$.
b) Quelles sont les coordonnées $[y(t)]_{\mathcal{F}}$ du polynôme $y(t) = 7 - 12t - 8t^2 + 12t^3$?

Remarque. Les polynômes de Hermite sont utiles lors de l'étude d'équations différentielles que l'on rencontre dans des problèmes de physique. Ils se construisent facilement à l'aide de relations de récurrence.

Sol.: Pour montrer que $\mathcal{F}$ forme une base de $\mathbb{P}_3$ il suffit de se rendre compte que nous avons exactement un polynôme de chaque degré compris entre 0 et 3. En effet, dans la base canonique $(1, t, t^2, t^3)$ les coordonnées des polynômes de Hermite sont $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\0\\4\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-12\\0\\8\end{pmatrix}$.

La matrice obtenue en plaçant ces vecteurs de coordonnées dans les colonnes est déjà échelonnée! On voit que cette matrice est inversible ce qui prouve que $\mathcal{F}$ est une base.

Pour calculer le vecteur de coordonnées de $y(t) = 7 - 12t - 8t^2 + 12t^3$ dans la base $\mathcal{F}$, il suffit de résoudre le système

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & 0\\0 & 2 & 0 & -12\\0 & 0 & 4 & 0\\0 & 0 & 0 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\-12\\-8\\12\end{pmatrix} \text{ On trouve } [y(t)]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix}3\\3\\-2\\3/2\end{pmatrix}$$

Exercice 11

Soit W le sous-espace vectoriel de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ des matrices symétriques ($A = A^T$). On considère les matrices suivantes de W :

$$A_1 = \begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix}0 & 2\\2 & 2\end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix}0 & 3\\3 & 0\end{pmatrix}$$

Utiliser la méthode de Gauss pour extraire de $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ une base de W.

Sol.: La méthode de Gauss pour extraire de $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ une base de W est la suivante. On commence en formant la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de coordonnées des A_i (dans la base canonique de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ et on s'empresse d'échelonner :

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 2 & 0\\2 & 0 & 2 & 1 & 3\\2 & 0 & 2 & 1 & 3\\1 & 1 & 2 & 0 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 2 & 0\\0 & 2 & 2 & -3 & 3\\0 & 2 & 2 & -2 & 3\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 2 & 0\\0 & 2 & 2 & -3 & 3\\0 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

On garde les matrices (A_1, A_2, A_4) qui correspondent aux colonnes pivots de la matrice ci-dessus. On a bien une base de W puisque W est un sous-espace de dimension 3 de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ (ce qui se voit par exemple en remarquant que la dimension est strictement plus petite que 4 et que les trois matrices choisies sont linéairement indépendantes comme le montrent nos calculs ; ou encore en remarquant que les matrices symétriques sont définies par une équation $a_{12} = a_{21}$).