Série 5 (Corrigé)

Cette série fait suite aux chapitres 2.2, 2.3, 3.1, 3.2 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay.

Remarques : il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.

Exercice 1

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

	V	F
a) Soient A, B et C trois matrices. Alors $(AB)C = (AC)B$.	☐	☐
b) Si A est une matrice inversible, alors A^{-1} l'est aussi.	☐	☐
c) Le produit de plusieurs matrices inversibles de taille $n \times n$ n'est pas inversible.	☐	☐
d) Si A est une matrice inversible de taille $n \times n$, alors l'équation $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ est compatible quel que soit $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^n$.	☐	☐

Sol.:

a) Faux. Prenons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = C$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ Alors on a
$(AB)C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, tandis que
$(AC)B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Vrai. Soit A une matrice inversible de taille $n \times n$, alors il existe une matrice, notée A^{-1}, telle que $AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$. Ces équations, lues de droite à gauche, disent que la matrice A^{-1} est aussi inversible et que son inverse vaut A, ainsi $(A^{-1})^{-1} = A$.

c) Faux. Si A et B sont inversibles, d'inverses respectifs A^{-1} et B^{-1}, alors le produit AB est inversible et son inverse vaut $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. En effet $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I_n = (B^{-1}A^{-1})(AB)$. Donc le produit de plusieurs matrices inversibles de taille $n \times n$ est toujours inversible.

d) Vrai. Soit A une matrice inversible de taille $n \times n$ et $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^n$ alors l'équation $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ admet une (unique) solution qui est $\overrightarrow{x} = A^{-1}\overrightarrow{b}$.

Exercice 2

Considérer la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Utiliser la méthode de Gauss-Jordan vue au cours pour inverser A, en la transformant en I_2 à l'aide d'une suite d'opérations élémentaires.
2. Utiliser les matrices associées aux opérations élémentaires du point précédent pour exprimer A sous la forme d'un produit de matrices élémentaires. Qu'observez-vous ?

Sol.: On passe de $(A|I_2)$ à $(I_2|A^{-1})$ à l'aide des deux transformations élémentaires suivantes (appliquées dans cet ordre) :

1. $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, dont la matrice est
$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$
2. $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$, dont la matrice est
$$F = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut donc écrire
$$FEA = I_2\,.$$
Rappelons que les matrices associées à des transformations élémentaires sont inversibles, et que leurs inverses sont des matrices élémentaires. On peut donc (voir cours) exprimer A par
$$A = E^{-1}F^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Remarquons que cette dernière est une factorisation LU de A.

Exercice 3

Soient A et B des matrices de taille $n \times n$. Montrer que si A ou B est non inversible, alors AB est non inversible.

Sol.: *Méthode 1 :* On utilise qu'une matrice carrée M est inversible si et seulement si le système $M\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ possède une solution unique pour tout $\overrightarrow{b}$.

Cas 1. Supposons la matrice A non inversible. Comme A est carrée, il existe un vecteur $\overrightarrow{b}$ tel que le système $A\overrightarrow{y} = \overrightarrow{b}$ ne possède pas de solution. Ensuite, en posant $\overrightarrow{y} = B\overrightarrow{x}$, le système $AB\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ ne possède pas de solution, et AB n'est pas inversible.

Cas 2. Supposons la matrice carrée B non inversible. Il existe un vecteur $\overrightarrow{x}_0 \neq \overrightarrow{0}$ tel que $B\overrightarrow{x}_0 = \overrightarrow{0}$. Ensuite, on a $AB\overrightarrow{x}_0 = \overrightarrow{0}$, ce qui montre que la solution du système $AB\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ n'est pas unique. Ainsi, AB est non inversible.

Méthode 2 : Nous allons montrer la contraposée : si AB est inversible, alors A **et** B sont inversibles. En effet, si AB est inversible, son inverse $C = (AB)^{-1}$ vérifie les égalités
$$ABC = I_n, \quad CAB = I_n.$$
De la première égalité on déduit que A est inversible d'inverse BC, et de la seconde on déduit que B est inversible d'inverse CA.
Méthode 3 : On utilise la propriété du déterminant $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Ainsi, si $\det(A) = 0$

ou $\det(B) = 0$, alors $\det(AB) = 0$. Une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est non nul, d'où le résultat.

Exercice 4

Calculer le déterminant des matrices élémentaires suivantes. Indiquer à quelle opération élémentaire chaque matrice correspond.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sol.:

$\det A = 1$ (A ajoute à la quatrième ligne la troisième ligne multipliée par α), $\det B = -1$ (B échange les lignes 1 et 2), $\det C = \alpha$ (C multiplie la première ligne par $\alpha \neq 0$).

Exercice 5

Soit A une matrice $n \times n$. Montrer que si deux lignes de A sont identiques, alors $\det(A) = 0$. Que peut-on dire si deux colonnes sont identiques ?

Sol.: Deux lignes de A sont identiques ssi deux colonnes de A^T sont identiques. Si deux colonnes de A^T sont les même, alors les colonnes sont linéairement dépendantes, ainsi A^T est non inversible, c-à-d $\det\left(A^T\right) = \det(A) = 0$. On peut donc conclure dans tous les cas $\det(A) = 0$.

Méthode 2 : Échanger deux lignes (ou colonnes) de A multiplie le déterminant de A par -1. En échangeant deux lignes identiques (ou colonnes) de A, la matrice A ne change pas. On a donc : $\det(A) = -\det(A)$. Ainsi $\det(A) = 0$.

Exercice 6

Montrer :

a) Si A est une matrice inversible, alors $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.
b) Si A et Q sont des matrices inversibles de taille $n \times n$, alors $\det(QAQ^{-1}) = \det A$.
c) Si U est une matrice carrée de taille $n \times n$ telle que $U^T U = I_n$, alors $\det U = \pm 1$.
d) Si A est une matrice carrée telle que $\det A^3 = 0$, alors A est non inversible.

Sol.:

a) On a $1 = \det I_n = \det(A^{-1}A) = \det A^{-1} \cdot \det A$. Ainsi, $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.
b) C'est une conséquence de a) (à noter qu'il n'est pas nécessaire que A soit inversible) :

$$\det\left(QAQ^{-1}\right) = \det Q \cdot \det A \cdot \det Q^{-1} = \det Q \cdot \det A \cdot \frac{1}{\det Q} = \det A.$$

c) (De telles matrices U s'appellent des matrices orthogonales). On a $1 = \det I_n = \det\left(U^T U\right) = \det U^T \cdot \det U = (\det U)^2$. Ainsi, $(\det U)^2 = 1$, d'où $\det U = \pm 1$.

d) On a $\det A^3 = (\det A)^3$. Ainsi, $(\det A)^3 = 0$ ssi $\det A = 0$, ce qui équivaut au fait que la matrice A est non inversible.

Exercice 7

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

	V	F
a) Si deux lignes d'une matrice A de taille 7×7 sont les mêmes, alors $\det A = 0$.	☐	☐
b) Si A est une matrice carrée dont le déterminant vaut 2, alors $\det(A^3) = 6$.	☐	☐
c) Si A et B sont des matrices de taille $n \times n$ telles que $\det A = 2$ et $\det B = 5$, alors $\det(A + B) = 7$.	☐	☐
d) Si A est une matrice carrée triangulaire inférieure, alors A est inversible.	☐	☐

Sol.:

a) Vrai. Si deux lignes d'une matrice A de taille 7×7 sont les mêmes, alors $\det(A) = -\det(A)$ (en échangeant les deux lignes qui sont égales) et donc $\det A = 0$.

b) Faux. Si A est une matrice carrée dont le déterminant vaut 2, alors $\det(A^3) = \det(A)^3 = 2^3 = 8 \neq 6$.

c) Faux. Prenons $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a bien $\det A = 2$ et $\det B = 5$, tandis que $\det(A + B) = 18$.

d) Faux. Par exemple $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée triangulaire inférieure, mais A n'est pas inversible.

Exercice 8

a) Les matrices sont de taille $n \times n$.

- ☐ Soient A, B deux matrices telles que A ou B n'est pas inversible. Alors AB n'est pas inversible.
- ☐ Il existe une matrice A inversible et une matrice B qui ne l'est pas telles que AB est inversible.
- ☐ Soient A, B deux matrices inversibles, alors $A + B$ est inversible.
- ☐ Soient A, B deux matrices inversibles, alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

b) Soit A une matrice $m \times n$ et B une matrice $n \times p$.

- ☐ Alors $(AB)^T = A^T B^T$.
- ☐ Alors $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ si A est inversible.
- ☐ Si $m = n$ et $A = A^T$, alors A est diagonale.
- ☐ Si $m = n = p$, $A = A^T$ et $B = B^T$, alors $(AB)^T = AB$.

c) ☐ Une matrice C de taille 2×2 vérifie $AC = CA$ pour toute matrice A de taille 2×2 si et seulement C est diagonale.

- ☐ Une matrice C de taille 2×2 vérifie $AC = CA$ pour toute matrice A de taille 2×2 si et seulement C est scalaire, i.e. $C = \lambda I$, où I est la matrice identité et $\lambda \in \mathbb{R}$.
- ☐ Soient A, C deux matrices 2×2 telles que $AC = CA$. Alors A est diagonale ou C est diagonale.
- ☐ Soient A, C deux matrices 2×2 telles que $AC = CA$. Alors A est scalaire ou C est scalaire.

d) Soit A une matrice de taille 7×8 et T l'application linéaire définie par $T\overrightarrow{x} = A \cdot \overrightarrow{x}$. Alors $\overrightarrow{x}$ est un vecteur de

- ☐ $\mathbb{R}^7$
- ☐ $\mathbb{R}^8$
- ☐ $\mathbb{R}^{15}$
- ☐ $\mathbb{R}^{56}$

e) Soit A une matrice $m \times n$ et B une matrice $n \times p$.

- ☐ Alors BA est une matrice $n \times n$.
- ☐ Alors A^T est une matrice $m \times n$.
- ☐ Alors A représente une application linéaire $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.
- ☐ Alors $(AB)^T$ est une matrice $p \times m$.

f) Soient A, B, C trois matrices $n \times n$.

- ☐ Si $AC = BC$, alors $A = B$.
- ☐ Si A est inversible et $AC = BC$, alors $A = B$.
- ☐ Si $C = C^{-1}$ et $AC = BC$, alors $A = B$.
- ☐ Si $C = C^T$ et $AC = BC$, alors $A = B$.

g) Soit A une matrice carrée et a un nombre réel. Alors

- ☐ $A + I$ est inversible.
- ☐ $(A - I)(A + I) = A^2 - I$.
- ☐ $(A + I)(A + I) = A^2 + I$.
- ☐ $(aA)^2 = a(A^2)$.

Sol.:

a) Le point 1 est vrai. En effet, si AB est inversible, alors l'application linéaire représentée par AB est bijective. On en déduit que B est injective et A est surjective, donc A, B sont bijectives, donc inversibles, vu que ce sont des matrices carrées. Ainsi, si A ou B n'est pas inversible, AB n'est pas inversible. Ce raisonnement montre également que le point 2 est faux. Pour voir que le point 3 est faux, prendre $A = I$ et $B = -I$. Pour le point 4, il est vrai que si A et B sont inversibles, alors AB est inversible, mais l'inverse est donné par $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

b) La réponse correcte est la 2. Pour le point 1, la formule est $(AB)^T = B^T A^T$. Pour le point 3, il suffit que A soit symétrique. Pour le point 4, on a $(AB)^T = BA$.

c) Le point 1 est faux : prendre, par exemple, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Le point 2 est vrai. Pour voir que les points 3 et 4 sont faux, prendre les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

d) $\mathbb{R}^8$.

e) Le produit BA n'est pas bien défini si $m \neq p$. La matrice A^T est de taille $n \times m$. La matrice A représente une application $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Le point 4 est vrai.

f) Pour voir que les points 1, 2 et 4 sont faux, prendre, par exemple,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le point 3 est vrai, car si on applique $C^{-1} = C$ à droite de chaque côté de l'équation $AC = BC$, on obtient $A = B$.

g) Pour voir que le point 1 est faux, prendre $A = -I$. Le point 2 est vrai par distributivité :

$$(A - I)(A + I) = A \cdot A - I \cdot A + A \cdot I - I \cdot I = A^2 - A + A - I = A^2 - I.$$

Le point3 est faux, car il manque le double produit $A \cdot I + I \cdot A = 2A$. Le point 4 n'est vrai que si $a^2 = a$. C'est donc faux en général. Par exemple si $A = I$ et $a = 2$ on a $(2I)^2 = 4I \neq 2I = 2I^2$.

Exercice 9

Soient $p_1(t) = 1 - t$, $p_2(t) = t^3$, $p_3(t) = t^2 - t + 1$. Est-ce que le polyôme $q(t) = t^3 - 2t + 1$ est dans le span$\{p_1(t), p_2(t), p_3(t)\}$? ***Sol.:*** Il y a deux méthodes possibles. Méthode 1 : en

utilisant l'application coordonnée et en échelonnant la matrice associée. Soit $\mathcal{E} = (1, t, t^2, t^3)$ la base canonique de $\mathbb{P}_3$ (avec l'ordre qui compte !). On a

$$[p_1]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, [p_2]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, [p_3]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ and } [q]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On peut échelonner la matrice augmentée $A = ([p_1]_{\mathcal{E}}\ [p_2]_{\mathcal{E}}\ [p_3]_{\mathcal{E}} \mid [q]_{\mathcal{E}})$. On obtient

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

et le système est incompatible. On peut aussi voir si la matrice A est inversible ce qui impliquera que les 4 vecteurs sont linéairement indépendants, et donc que $q(t)$ n'est pas dans le span. Ceci peut se faire en calculant le déterminant ou en échelonnant la matrice.

Méthode 2 : on essaie de trouver les coefficients de la combinaison linéaire (s'ils existent)

$$q(t) = \alpha_1 p_1(t) + \alpha_2 p_2(t) + \alpha_3 p_3(t)$$

C'est-à-dire

$$\begin{aligned} q(t) &= \alpha_1(1-t) + \alpha_2 t^3 + \alpha_3(t^2 - t + 1) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_3) + (-\alpha_1 - \alpha_3)t + \alpha_3 t^2 + \alpha_2 t^3 \end{aligned}$$

Pour que cette égalité soit vraie, il faut que les coefficients de chaque monôme (les coefficients devant $1, t, t^2, t^3$) soient égaux. Donc on doit résoudre

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 1 \\ -\alpha_1 - \alpha_3 = -2 \\ \alpha_2 = 1 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Ce qui n'est pas possible car on devrait avoir $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_1 = 2$ (vu que $\alpha_3 = 0$).

Donc $q(t)$ n'est pas dans le span p_1, p_2, p_3.

Exercice 10

Soient V et W deux espaces vectoriels, et $T : V \to W$ une transformation linéaire. Montrer que si $U \subset V$ est un sous-espace vectoriel, alors l'ensemble image $T(U)$ est un sous-espace vectoriel de W.

Sol.: On doit prouver (i) si $w \in T(U)$ et α est un scalaire, alors $\alpha w \in T(U)$ et (ii) si $w_1 \in T(U)$ et $w_2 \in T(U)$ alors $w_1 + w_2 \in T(U)$, et (iii) $T(U)$ contient 0_W.

(i) En effet : $w \in T(U) \Leftrightarrow w = T(u)$ pour un certain $u \in U$. Ainsi, en utilisant la linéarité de T, $\alpha w = \alpha T(u) = T(\alpha u) \in T(U)$ ($\alpha u \in U$ car U est un s.e.v. de V, donc fermé pour la multiplication par un scalaire). (ii) De même, $w_1 + w_2 = T(u_1) + T(u_2) = T(u_1 + u_2) \in T(U)$ (U est fermé pour l'addition). (iii) On a $0_V \in U$ car U s.e.v. de V et $T(0_V) = 0_W$ par linéarité de T, donc $0_W \in T(U)$ (car il existe $u = 0_V \in U$ tel que $0_W = T(u)$).

Exercice 11

On rappelle que $\mathbb{P}_3$ est l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

a) Les vecteurs de $\mathbb{P}_3$ suivants sont-ils linéairement indépendants ?
   (i) p_1, p_2, p_3 tels que $p_1(t) = 1 - t^2$, $p_2(t) = t^2$, $p_3(t) = t$, $t \in \mathbb{R}$.
   (ii) p_1, p_2, p_3 tels que $p_1(t) = 1 + t + t^2$, $p_2(t) = t + t^2$, $p_3(t) = t^2$, $t \in \mathbb{R}$.

b) Les vecteurs p_1, p_2, p_3 de (ii) forment-ils une base de $\mathbb{P}_3$?

Sol.:

a) i) Oui. En effet,

$x_1p_1(t)+x_2p_2(t)+x_3p_3(t) = x_1(1-t^2)+x_2t^2+x_3t = t^2(x_2-x_1)+x_3t+x_1 = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ ssi

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_1 = 0, \end{cases}$$

i.e. $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

ii) Oui

b) Non, aucun des trois vecteurs ne permet d'engendrer un polynôme de degré égal à 3. Par exemple t^3 n'est pas une combinaison linéaire de p_1, p_2 et p_3. Plus tard on verra que $\dim(\mathbb{P}_3) = 4$ et il y a seulement trois vecteurs, donc ça ne peut pas être une base.

Exercice 12

On rappelle qu'une base d'un espace vectoriel est un système de génèrateurs linéairement indépendants. Vous pouvez ignorer la partie (c).

a) Prouver que les vecteurs $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Démontrer que l'ensemble $\mathcal{F} = \{1+t^2, t+t^2, 1+2t+t^2\}$ est une base de $\mathbb{P}_2$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré 2.

c) Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles. Montrer que les fonctions $\sin^2 t$ et $\cos^2 t$ sont linéairement indépendantes. Forment-elles une base de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

d) Soit $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices de taille 2×3. Montrer que les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sont linéairement indépendantes. Comment faire pour complèter cette famille de quatre matrices en une base de $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$?

Sol.:

a) Pour montrer que les trois vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^3$ il suffit de vérifier que la matrice A de taille 3×3 formée en plaçant ces vecteurs dans les colonnes possède trois pivots. En effet on sait alors que tout système $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{v}$ a une unique solution. Ceci signifie d'une part que tout vecteur $\overrightarrow{v}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$. Il s'agit donc d'un système de générateurs. On en déduit aussi d'autre part que la seule solution du système $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ est le vecteur nul, si bien que les trois colonnes de A sont libres.

b) Pour montrer que $\mathcal{F} = \{1+t^2, t+t^2, 1+2t+t^2\}$ forme une base de $\mathbb{P}_2$, il suffit de montrer que ces polynômes sont linéairement indépendants car trois vecteurs libres dans un espace vectoriel de dimension 3 en forment une base.

Ecrivons donc une combinaison linéaire arbitraire et regardons quand elle donne le polynôme nul :

$$\alpha(1+t^2) + \beta(t+t^2) + \gamma(1+2t+t^2) = (\alpha+\gamma) + (\beta+2\gamma)t + (\alpha+\beta+\gamma)t^2$$

Ce polynôme est nul si et seulement si tous les coefficients sont nuls. On est donc amené à résoudre un système de trois équations à trois inconnues. On constate que la seule solution est la solution triviale.

c) Les fonctions $\sin^2 t$ et $\cos^2 t$ sont linéairement indépendantes si la seule combinaison linéaire

$$f(t) = \alpha \sin^2 t + \beta \cos^2 t$$

qui donne la fonction nulle (constamment nulle !), est donnée par $\alpha = \beta = 0$. Or, on calcule $f(0) = \beta$ et $f(\pi/2) = \alpha$. Si la fonction f est nulle, elle s'annule en particulier en 0 et en $\pi/2$. Par conséquent $\alpha = 0$ et $\beta = 0$.

Ces deux fonctions ne forment pas une base de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. En effet toute combinaison linéaire des fonctions $\sin^2 t$ et $\cos^2 t$ est continue, si bien que la fonction $f(t)$ qui vaut 1 en zéro et zéro partout ailleurs ne peut appartenir à $\mathrm{Vect}(\sin^2 t, \cos^2 t)$. En fait de nombreuses fonctions continues n'y sont pas non plus, par exemple $g(t) = t$.

d) Il s'agit à nouveau de comprendre quand une combinaison linéaire des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donne la matrice nulle. A nouveau, nous sommes amenés à résoudre un système homogène (de quatre équations et quatre inconnues) donné par les coefficients de la combinaison linéaire $\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D = 0$. On calcule $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$, si bien que les matrices données sont libres.

Pour complèter cette famille de quatre matrices en une base de $M_{2\times3}(\mathbb{R})$, il y a de nombreuses options. On peut par exemple observer que les quatre matrices ont des coefficients nuls dans la 3ème colonne. Il suffit d'ajouter les deux matrices e_{13} et e_{23} pour trouver une base.