Série 4 (Corrigé)

Cette série fait suite aux chapitres 1.9, 2.1, 2.2 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay.

Remarques : il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.

Exercice 1

a) Calculer la matrice associée à l'application linéaire $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donnée par
$$T(x, y, z) = (x + 3y - 2z\ ,\ 3x + 4y + 2z\ ,\ 4x + 7y)$$

b) Déterminer si l'application linéaire T est injective, surjective ou bijective.

c) Déterminer ensuite tous les vecteurs (x, y, z) tels que $T(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

Sol.:

Exercice 2

a) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Trouver (si elle existe) une matrice B de taille 2×2 non nulle telle que $AB = 0$. *(Idée : écrire AB sous la forme $\begin{pmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 \end{pmatrix}$)*

b) Même question pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

c) Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & k \end{pmatrix}$. Pour quelle(s) valeur(s) de $k \in \mathbb{R}$ a-t-on $AB = BA$?

d) Trouver une matrice A non nulle telle que $A^2 = 0$.

Sol.:

a) On note $\vec{b}_1$ et $\vec{b}_2$ les colonnes de B : $B = \begin{pmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 \end{pmatrix}$. On a $AB = \begin{pmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, on doit chercher un vecteur non nul $\vec{b}_1$ tel que $A\vec{b}_1 = \vec{0}$. Si un tel vecteur existe, on peut poser par exemple $B = \begin{pmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 \end{pmatrix}$ avec $\vec{b}_2 = \vec{0}$. Sinon, une telle matrice B n'existe pas.

Soit $\overrightarrow{b}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Le système $A\overrightarrow{b}_1 = \overrightarrow{0}$ est linéaire en x_1 et x_2 avec pour matrice augmentée $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$, dont la forme échelonnée réduite est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, la solution générale est $x_1 = -2x_2$, c'est-à-dire, sous forme vectorielle $\overrightarrow{b}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} x_2$. Ainsi, (en fixant $x_2 = 1$) on trouve un vecteur $\overrightarrow{b}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ tel que $A\overrightarrow{b}_1 = \overrightarrow{0}$. On peut donc proposer la matrice $B = \begin{pmatrix} \overrightarrow{b}_1 & \overrightarrow{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) En résolvant $A\overrightarrow{b}_1 = \overrightarrow{0}$ pour $\overrightarrow{b}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ on obtient un système linéaire avec pour matrice augmentée $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. La forme échelonnée réduite est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Par conséquent, le système a une unique solution triviale $\overrightarrow{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et la matrice B telle que $AB = 0$ n'existe pas.

c) On calcule $AB = \begin{pmatrix} 1 & 12-4k \\ -30 & -20+k \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 1 & -24 \\ 15-5k & -20+k \end{pmatrix}$. L'équation $AB = BA$ équivaut donc au système

$$\begin{cases} 12 - 4k & = & -24 \\ -30 & = & 15 - 5k, \end{cases}$$

avec pour unique solution $k = 9$.

d) Par exemple, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

Soient $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$, et $T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto x_1 + x_2 + x_3$.

a) Écrire les matrices canoniques associées à T_1 et T_2 et le produit matriciel associé à la composition $T_2 \circ T_1$ telle que $T_2 \circ T_1(\overrightarrow{x}) = T_2(T_1(\overrightarrow{x}))$ pour tout $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^2$.

b) Quel est le domaine de définition de $T_2 \circ T_1$? Quel est le domaine d'arrivée ?

Sol.:

a) $T_1(\boldsymbol{e}_1) = T_1(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T_1(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

De même $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi la composition $T_2 \circ T_1$ correspond à $A_2 A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$.

b) On a $T_2 \circ T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Le domaine de définition est $\mathbb{R}^2$. Le domaine d'arrivée est $\mathbb{R}$.

Exercice 4

a) Calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

(i) en utilisant la formule générale de l'inverse d'une matrice 2×2 ;

(ii) en mettant la matrice $(A \quad I_2)$ sous forme échelonnée réduite.

b) Calculer l'inverse de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ en mettant la matrice $(B \quad I_3)$ sous forme échelonnée réduite.

Sol.:

a) Pour la matrice A.

(i) $\det(A) = 2 \times 4 - 2 \times 2 = 4$. Ainsi, $A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

(ii)

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right).$$

Ainsi, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

b) Pour la matrice B.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 8 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 10 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 & 3/2 & 1/2 \end{array}\right).$$

Ainsi, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 10 & 4 & 1 \\ 7/2 & 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Exercice 5

Soient A et B des matrices telles que le produit AB soit bien défini. Montrer que $(AB)^T = B^T A^T$.

Sol.: Le produit AB est bien défini, le nombre m de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B. En transposant, le nombre de lignes de A^T est égal au nombre de colonnes de B^T, donc le produit $B^T A^T$ est également bien défini. On note $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ et on compare les éléments d'indice ij des matrices $(AB)^T$ et $B^T A^T$:

$$\left((AB)^T\right)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^{m} a_{jk} b_{ki},$$

$$\left(B^T A^T\right)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \left(B^T\right)_{ik} \left(A^T\right)_{kj} = \sum_{k=1}^{m} b_{ki} a_{jk},$$

on obtient les mêmes quantités, ainsi $(AB)^T = B^T A^T$.

Exercice 6

Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles (essayer d'utiliser le moins de calculs possible, justifier votre réponse).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 7 & 14 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -6 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 8 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -7 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 18 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 17 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Sol.:

A) Comme la colonne 1 est un multiple de la colonne 2, les colonnes sont linéairement dépendantes, et donc la matrice A n'est pas inversible.

B) Après plusieurs opérations de réduction sur les lignes, on obtient une forme échelonnée (non réduite)

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

On trouve un pivot dans chaque ligne et la matrice est carrée, donc elle est inversible.

C) C est inversible car sous forme échelonnée (non réduite) avec pivot dans chaque ligne et la matrice est carrée.

D) D^T est sous forme échelonnée, avec un pivot dans chaque ligne et de taille carrée, donc D^T est inversible. Par conséquent, D est également inversible.

E) La matrice E n'est pas carrée, donc non inversible.

Exercice 7

Soient A une matrice $m \times n$ et B, C des matrices de tailles appropriées. Montrer les égalités suivantes :

a) $A(B + C) = AB + AC$

b) $r(AB) = (rA)B = A(rB)$, $\forall r \in \mathbb{R}$

c) $A = AI_n = I_m A$.

Précisez les dimensions des matrices B et C.

Sol.:

a) Pour que le produit soit définit il faut que B et C soient de taille $n \times p$. On a alors

$$\begin{aligned} A((\overrightarrow{b_1} \cdots \overrightarrow{b_p}) + (\overrightarrow{c_1} \cdots \overrightarrow{c_p}) &= A(\overrightarrow{b_1} + \overrightarrow{c_1} \cdots \overrightarrow{b_p} + \overrightarrow{c_p}) \\ &= (A(\overrightarrow{b_1} + \overrightarrow{c_1}) \cdots A(\overrightarrow{b_p} + \overrightarrow{c_p})) \\ &= (A\overrightarrow{b_1} + A\overrightarrow{c_1} \cdots A\overrightarrow{b_p} + A\overrightarrow{c_p}) \\ &= A(\overrightarrow{b_1} \cdots \overrightarrow{b_p}) + A(\overrightarrow{c_1} \cdots \overrightarrow{c_p}) \end{aligned}$$

b) B est de taille $n \times p$. Alors $r(AB) = r(A\overrightarrow{b_1} \cdots A\overrightarrow{b_p}) = (rA\overrightarrow{b_1} \cdots rA\overrightarrow{b_p}) = (rA)(\overrightarrow{b_1} \cdots \overrightarrow{b_p})$.

c) Si $A = (\overrightarrow{a_1} \cdots \overrightarrow{a_n})$, avec $\overrightarrow{a_j} \in \mathbb{R}^m$. Alors $A\overrightarrow{e_j} = \overrightarrow{a_j}$, où $\overrightarrow{e_j} \in \mathbb{R}^n$ est le j-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Donc

$$A = (\overrightarrow{a_1} \cdots \overrightarrow{a_n}) = (A\overrightarrow{e_1} \cdots A\overrightarrow{e_n}) = AI_n.$$

On a aussi que $I_m\overrightarrow{a_j} = \overrightarrow{a_j}$ ainsi $A = I_mA$.

Exercice 8

Montrez que les colonnes d'une matrice A inversible de taille $n \times n$.

a) engendrent $\mathbb{R}^n$;

b) sont linéairement indépendantes.

Sol.:

a) Par définition, A est inversible s'il existe une matrice notée A^{-1} (de taille $n \times n$) telle que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

Les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^n$ si et seulement si, pour tout $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^n$ (arbitraire), le système linéaire $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ possède une solution. En prenant $\overrightarrow{x} = A^{-1}\overrightarrow{b}$ on obtient $A\overrightarrow{x} = AA^{-1}\overrightarrow{b} = I_n\overrightarrow{b} = \overrightarrow{b}$.

b) Les colonnes de A sont linéairement indépendantes si et seulement si le système linéaire $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ n'admet que la solution triviale, ce qui est satisfait car toute solution de $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ vérifie $\overrightarrow{x} = I_n\overrightarrow{x} = A^{-1}A\overrightarrow{x} = A^{-1}\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.

Exercice 9

Soit

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer C^2 et montrer que C^3 est la matrice nulle. On dit que C est *nilpotente*.
2. Montrer sans faire de calculs explicites que $I_3 + C + C^2$ est l'inverse de la matrice $(I_3 - C)$.
3. Trouver l'inverse (explicite cette fois !) de la matrice $I - C$.
4. Soit $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Trouver les solutions de l'équation $\overrightarrow{x} = C\overrightarrow{x} + \overrightarrow{b}$ en échelonnant la matrice augmentée $(I - C \mid \overrightarrow{b})$.
5. Résoudre la même équation que ci-dessus en utilisant la formule $\overrightarrow{x} = (I - C)^{-1}\overrightarrow{b}$.

Sol.:

1. On calcule $C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et alors $C^3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice nulle.
   On dit que C est *nilpotente* lorsqu'une puissance de C est nulle.

2. Il suffit de calculer le produit en utilisant la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition :

$$(I_3+C+C^2)(I_3-C) = I_3\cdot I_3+C\cdot I_3+C^2\cdot I_3-I_3\cdot C-C\cdot C-C^2\cdot C = I_3+C+C^2-C-C^2-C^3$$

   Par commutativité de l'addition matricielle on trouve donc $I_3 - C^3 = I_3$ puisque $C^3 = 0$. Ainsi $I_3 + C + C^2$ est l'inverse de la matrice $(I_3 - C)$.

3. Le calcul ci-dessus montre que

$$(I-C)^{-1} = I_3 + C + C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 19 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. L'échelonnage de la matrice augmentée donne la solution $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5. La formule $\overrightarrow{x} = (I-C)^{-1} \cdot \overrightarrow{b}$ donne la solution $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Exercice 10

Calculer les produits matriciels suivants :

$$\text{a)} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \qquad \text{b)} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}; \qquad \text{c)} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

En déduire le théorème suivant : Si A est une matrice $m \times n$ et B une matrice $n \times p$, alors le produit AB peut être obtenu par la formule colonne-ligne suivante :

$$AB = \mathrm{col}_1(A)\mathrm{lig}_1(B) + \cdots + \mathrm{col}_n(A)\mathrm{lig}_n(B), \tag{1}$$

où $\mathrm{col}_k(A)$ est la matrice $m \times 1$ correspondant à la $k^{\text{ème}}$ colonne de la matrice A, et $\mathrm{lig}_k(B)$ est la matrice $1 \times p$ correspondant à la $k^{\text{ème}}$ ligne de la matrice B.

Souvenez-vous de cette propriété du produit matriciel : on l'a utilisée en conjonction avec le théorème spectral et avec le théorème de la décomposition en valeurs singulières pour écrire une matrice A comme une somme de plusieurs matrices simples : $A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{v}_i \overrightarrow{v}_i^\top$ (pour une matrice symétrique) et $A = \sum_{i=1}^{\min(m,n)} \sigma_i \overrightarrow{u}_i \overrightarrow{v}_i^\top$ (pour une matrice quelconque). Faites explicitement le lien avec cet exercice.

Sol.:

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 12 & 20 \end{pmatrix}$.

Preuve du théorème : Soit C la matrice $m \times p$ définie par le produit $C = AB$. Pour $i \in \{1, \dots, m\}$ et $j \in \{1, \dots, p\}$, on a

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

On définit désormais, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, la matrice $C^{(k)}$, de taille $m \times p$, donnée par $C^{(k)} = \mathrm{col}_k(A)\,\mathrm{lig}_k(B)$. La matrice $C^{(k)}$ s'écrit

$$C^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{1k}b_{k1} & \cdots & a_{1k}b_{kp} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{mk}b_{k1} & \cdots & a_{mk}b_{kp} \end{pmatrix},$$

i.e. on a $c_{ij}^{(k)} = a_{ik}b_{kj}$. On s'aperçoit alors que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} C^{(k)} \right)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^{(k)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = c_{ij},$$

ce qui conclut la preuve.

Exercice 11

a) Calculer le déterminant des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Même question pour A^T, B^T, C^T, D^T, E^T.

Sol.:

a) Pour A à D.

A : L'idée est de développer par rapport à une ligne ou une colonne avec beaucoup de zéros pour faire le moins de calculs possible.
On développe par rapport à la première colonne de A. On obtient

$$\det A = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 4.$$

B : On développe par rapport à la deuxième colonne de B : $\det B = 0$. On peut aussi remarquer que la matrice est non inversible (deux colonnes identiques), et donc $\det B = 0$.

C : On développe par rapport à la troisième colonne de C : $\det C = 0$. On peut aussi remarquer que la matrice est non inversible (deux colonnes identiques), et donc $\det C = 0$.

D : On développe par rapport à la première colonne de D. On obtient $\det D = 9 \cdot \det \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 6 \cdot \det \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = 0.$

E : On développe par rapport à la première colonne de E. On obtient

$$\det E = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 84.$$

b) La transposition ne change pas la valeur du déterminant. Les résultats sont les mêmes qu'au a).

Exercice 12

Calculer, en faisant le moins de calculs possible, les déterminants des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sol.: On calcule le déterminant de A. Ensuite, pour faire le moins de calculs possible, on réalise des opérations élémentaires sur la matrice A pour obtenir les matrices B, C et D. Ceci revient à multiplier A par des matrices élémentaires. On a exhibé à l'exercice 4 les effets multiplicatifs sur le déterminant de A qui en résultent.

$$\begin{aligned} &\det A = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = -9, \\ &\det B = 2 \det A = -18, (L_1 \leftarrow 2L_1) \\ &\det C = -\det A = 9, (L_1 \leftrightarrow L_2) \\ &\det D = \det A = -9. \ (L_1 \leftarrow L_1 + L_2) \end{aligned}$$

Exercice 13

a) Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

b) Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} a & b & a \\ b & a & b \\ a+b & a+b & a+b \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ a & a+b & c \\ a & b & a \end{vmatrix}.$$

c) Calculer le déterminant de la matrice suivante. Comment le déterminant dépend t-il de l'angle φ ? Pourquoi ?

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

d) Soient $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 18 & 17 & 23 \\ 49 & 1 & 72 & 10 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 18 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 18 \end{pmatrix}$. Calculer $\det(AB)$.

Sol.:

a) 11. Il est plus simple de développer par rapport à la deuxième ligne.

b) Premier déterminant : 0 car la troisième ligne est la somme des deux premières. Second déterminant : a^3.

c) $\det A = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ est indépendant de l'angle φ. Toutes les matrices de rotation vérifient la propriété $\det A = 1$.

d) $\det B = 0$, donc $\det(AB) = \det A \cdot \det B = 0$.

Exercice 14

Calculer le déterminant de la matrice ci-dessous, en la transformant progressivement à l'aide de transformations élémentaires.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & 7 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Sol.:

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & 7 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 9 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & 7 \\ 0 & -3 & -16 & -9 \\ 0 & 0 & -12 & -8 \\ 0 & 0 & 5 & -9 \end{pmatrix} = -12 \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & 7 \\ 0 & -3 & -16 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{37}{3} \end{pmatrix} = -444$$
