

Série 3 (Corrigé)

Cette série fait suite aux chapitres 1.5, 1.7, 1.8, 1.9 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay.

Remarques : il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.

Exercice 1

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 8 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ecrire l'ensemble solution de l'équation $A\vec{x} = \vec{0}$ sous forme paramétrique vectorielle.

Sol.: Pour réduire la matrice A qui est déjà échelonnée, il suffit d'effectuer deux opérations : $L_1 + 2L_3$ et $L_2 - 6L_3$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 8 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 8 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On voit ici qu'il y a trois inconnues principales, celles des colonnes pivot, x_1 , x_3 et x_6 , et 3 inconnues libres (x_2 , x_4 et x_5) que l'on utilise comme paramètres pour décrire la solution générale du système :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ pour } s, t, u \in \mathbb{R}$$

Exercice 2

Déterminer lesquelles des applications suivantes sont linéaires et donner la matrice associée lorsque cela est possible :

a) $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto \sin x$

- b) $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$
 $x \longmapsto (x, x^2)$
- c) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \longmapsto (x + y, 2x - 3y)$
- d) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y, z) \longmapsto (2x - z, x + y)$
- e) $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y, z, u) \longmapsto (2x + u, y - z + 1)$

Sol.:

- a) L'application $T(x) = \sin x$ n'est pas linéaire car

$$T\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = T(\pi) = \sin \pi = 0$$

$$T\left(\frac{\pi}{2}\right) + T\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} = 2 \neq 0$$

- b) L'application $T(x) = (x, x^2)$ n'est pas linéaire car

$$T(\lambda x) = (\lambda x, \lambda^2 x^2)$$

$$\lambda T(x) = \lambda(x, x^2) = (\lambda x, \lambda x^2) \neq T(\lambda x) \quad \text{sauf si } \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = 0.$$

- c) L'application $T(x, y) = (x + y, 2x - 3y)$ est linéaire. En effet, si $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ nous avons

$$T(\vec{u} + \vec{v}) = \begin{pmatrix} (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \\ 2(x_1 + x_2) - 3(y_1 + y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) \\ (2x_1 - 3y_1) + (2x_2 - 3y_2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ 2x_1 - 3y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 + y_2 \\ 2x_2 - 3y_2 \end{pmatrix}$$

$$= T(\vec{u}) + T(\vec{v}),$$

$$T(\lambda \vec{u}) = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \lambda y_1 \\ 2\lambda x_1 - 3\lambda y_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ 2x_1 - 3y_1 \end{pmatrix} = \lambda T(\vec{u}).$$

Comme $T(1, 0) = (1, 2)$ et $T(0, 1) = (1, -3)$, la matrice associée à T est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

- d) L'application $T(x, y, z) = (2x - z, x + y)$ est linéaire (calcul analogue à celui de la partie c)).

Comme $T(1, 0, 0) = (2, 1)$, $T(0, 1, 0) = (0, 1)$ et $T(0, 0, 1) = (-1, 0)$, la matrice associée à est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- e) L'application $T(x, y, z, u) = (2x + u, y - z + 1)$ n'est pas linéaire car

$$T(0, 0, 0, 0) = (0, 1) \neq (0, 0).$$

Exercice 3

Décrire quelle est la forme échelonnée réduite dans les cas suivants :

- a) A est une matrice 3×3 avec des colonnes linéairement indépendantes.
b) A est une matrice 4×2 , $A = (\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2)$ et \vec{a}_2 n'est pas un multiple de \vec{a}_1 .

- c) A est une matrice 4×3 , $A = (\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \vec{a}_3)$. Les vecteurs \vec{a}_1 et \vec{a}_2 sont linéairement indépendants, et \vec{a}_3 n'est pas une combinaison linéaire de \vec{a}_1 et \vec{a}_2 .

Sol.:

- a) Comme les colonnes de A sont linéairement indépendantes, le système homogène $A\vec{x} = \vec{0}$ n'admet que la solution triviale. Ainsi la forme échelonnée réduite s'écrit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- b) Si \vec{a}_2 n'est pas un multiple de \vec{a}_1 , alors il n'existe pas $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{a}_2 = \lambda \vec{a}_1$. Deux cas sont possibles.

Si $\vec{a}_1 \neq \vec{0}$, alors les deux vecteurs \vec{a}_1, \vec{a}_2 sont linéairement indépendants, et la forme échelonnée réduite est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Si \vec{a}_1 est le vecteur nul, alors le vecteur \vec{a}_2 est non nul (car non multiple de $\vec{0}$), et la forme échelonnée réduite est : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- c) \vec{a}_1 et \vec{a}_2 sont linéairement indépendants, donc ils engendrent un plan, c'est-à-dire un espace de dimension 2. Le vecteur \vec{a}_3 n'est pas dans cet espace, car ce n'est pas une combinaison linéaire de \vec{a}_1, \vec{a}_2 . Par conséquent, les trois vecteurs $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ engendrent un espace de dimension 3, ils sont linéairement indépendants.

D'où la forme échelonnée réduite de A : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 4

L'assertion suivante est-elle correcte (justifier) ?

Tout ensemble de vecteurs $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$ de \mathbb{R}^n est linéairement dépendant si $p > n$.

Sol.:

L'assertion est correcte.

Théorème : si un ensemble $S = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$ contient plus de vecteurs que chaque vecteur n'a de composantes, alors S est linéairement dépendant.

Justification : lorsque $p = n$, les vecteurs sont soit déjà linéairement dépendants, soit linéairement indépendants et ils engendrent alors \mathbb{R}^n . Ce dernier cas signifie que tout vecteur (en particulier un nouveau vecteur que l'on ajoute à l'ensemble S) peut s'exprimer comme combinaison linéaire des autres.

Exercice 5

Trouver les matrices correspondant aux transformations linéaires suivantes (exprimées dans la base canonique) :

$$\text{a) } T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, T \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, T \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, T \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, T \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, T \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, T \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, T \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Sol.:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Exercice 6

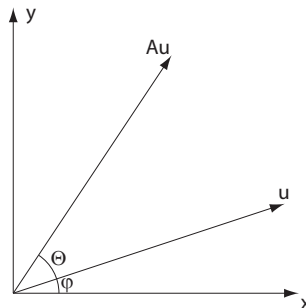
Décrire géométriquement la transformation linéaire suivante : $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par

$$T(\vec{u}) = A\vec{u} \quad \text{où } A = \begin{pmatrix} \cos \Theta & -\sin \Theta \\ \sin \Theta & \cos \Theta \end{pmatrix}.$$

Indication : Calculer les images de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ par T .

Sol.:

Les images de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont $\begin{pmatrix} \cos \Theta \\ \sin \Theta \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -\sin \Theta \\ \cos \Theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2} + \Theta) \\ \sin(\frac{\pi}{2} + \Theta) \end{pmatrix}$, respectivement. La transformation linéaire correspond à une rotation anti-horaire d'angle Θ .



On peut aussi décrire la transformation de la façon suivante. Un vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ s'écrit en coordonnées polaires $\vec{u} = r \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$, et par les formules d'addition d'angles on calcule

$$A\vec{u} = r \begin{pmatrix} \cos \Theta \cos \varphi - \sin \Theta \sin \varphi \\ \sin \Theta \cos \varphi + \cos \Theta \sin \varphi \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos(\Theta + \varphi) \\ \sin(\Theta + \varphi) \end{pmatrix}.$$

On voit que la longueur r n'est pas modifiée par la transformation T , mais l'angle φ est remplacé par $\Theta + \varphi$, donc T est bien une rotation d'angle Θ .

Exercice 7

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

- a) Deux vecteurs sont linéairement dépendants si et seulement s'ils se trouvent sur une même droite qui passe par l'origine.
- b) Si un ensemble comporte moins de vecteurs que le nombre de composantes de ceux-ci, alors il est linéairement indépendant.
- c) Une équation homogène est toujours compatible.
- d) Si \vec{x} est une solution non triviale de $A\vec{x} = \vec{0}$, alors aucune composante de \vec{x} est nulle.

Sol.:

- a) Vrai. Deux vecteurs \vec{v} et \vec{w} sont linéairement dépendants s'il existe des nombres $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ tels que $\lambda\vec{v} + \mu\vec{w} = \vec{0} \iff \lambda\vec{v} = -\mu\vec{w}$. Si $\lambda \neq 0$ on peut donc écrire $\vec{v} = -\frac{\mu}{\lambda}\vec{w}$ et donc \vec{v} est multiple de \vec{w} . Si $\lambda = 0$ alors forcément $\mu \neq 0$ et par le même argument on a que \vec{w} est multiple de \vec{v} . Ceci signifie exactement que les vecteurs \vec{v} et \vec{w} se trouvent sur une même droite qui passe par l'origine.
- b) Faux. Prenons par exemple les 2 vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ayant 3 composantes. Ils sont pourtant linéairement dépendants.
- c) Vrai. Une équation homogène $A\vec{x} = \vec{0}$ possède toujours au moins la solution nulle et est donc toujours compatible.
- d) Faux. Prenons par exemple la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors \vec{x} est une solution non triviale de $A\vec{x} = \vec{0}$, mais \vec{x} a une composante nulle.

Exercice 8

Dans les cas suivants, écrire la matrice canonique correspondant à la transformation, et déterminer si la transformation est injective, surjective ou bijective.

a) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4x_1 + 3x_2 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\text{b) } T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto x_1 + x_2 + x_3$$

$$\text{c) } T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{e) } T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{f) } T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Sol.:

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, injective (les colonnes sont linéairement indépendantes). Non surjective, car seulement deux vecteurs ne peuvent engendrer \mathbb{R}^3 . Donc non bijective.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, surjective (l'image est \mathbb{R}), non injective (plus de colonnes que de lignes). Donc non bijective.

c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, injective, surjective et bijective (en permutant les lignes 1 et 3, on trouve la matrice identité).

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, rien (non injective car $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est envoyé sur zéro, et non surjective, car les vecteurs de l'image satisfont $x_1 = x_2$).

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, injective, surjective et bijective.

f) T n'est pas une transformation linéaire, il est impossible de la représenter canoniquement par une matrice.

Exercice 9

Calculer la matrice associée à l'application linéaire $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par

$$T \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x + 3y + 5z + 7u \\ -x + 3y \\ x + 2y + 3z + 7u \end{pmatrix}$$

et déterminer si l'application est injective, surjective ou bijective.

Sol.: Pour gagner de la place dans le corrigé, on utilise la notation vecteur-ligne. Soit $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire donnée par

$$T(x, y, z, u) = (x + 3y + 5z + 7u, -x + 3y, x + 2y + 3z + 7u).$$

Nous avons

$$\begin{cases} T(1, 0, 0, 0) = (1, -1, 1) \\ T(0, 1, 0, 0) = (3, 3, 2) \\ T(0, 0, 1, 0) = (5, 0, 3) \\ T(0, 0, 0, 1) = (7, 0, 7) \end{cases} \implies A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- Comme il n'y a pas un pivot par colonne, l'application linéaire n'est pas injective.
- Comme il y a un pivot par ligne, l'application linéaire est surjective.
- Comme l'application linéaire n'est pas injective, elle n'est pas bijective.

Exercice 10

Considérons les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E = (1 \ 4).$$

Calculer les produits suivants (s'ils existent). Si les produits n'existent pas, expliquer pourquoi.

- $AB, BA, AC, CA, BC, CB, CD, EC, EA$
- $AA^T, A^T A, BA^T, BC^T, C^T A, BD^T, D^T B$

Sol.:

$$\begin{aligned} \text{a) } AB &= \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}, AC \text{ n'existe pas : } (2 \times 3) \times (2 \times 2), CA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \\ BC &= \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 6 & 12 \\ 9 & 15 \end{pmatrix}, CB \text{ n'existe pas : } (2 \times 2) \times (3 \times 2), CD \text{ n'existe pas : } (2 \times 2) \times (3 \times 1), \\ EC &= (9 \ 15), EA = (2 \ 5 \ 9). \\ \text{b) } AA^T &= \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, A^T A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}, BA^T \text{ n'existe pas : } (3 \times 2) \times (3 \times 2), BC^T = \\ &\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 10 \\ 13 & 14 \end{pmatrix}, C^T A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 6 & 6 & 9 \end{pmatrix}, BD^T \text{ n'existe pas : } (3 \times 2) \times (1 \times 3), D^T B = (4 \ 5). \end{aligned}$$

Exercice 11

- Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Est-ce que $AB = BA$?
- Même question pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Sol.:

a) Oui. $AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarque : A est la matrice identité, elle commute avec n'importe quelle matrice.

b) Non. $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.