Série 2 (Corrigé)

Cette série fait suite aux chapitres 1.2-1.5 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay.

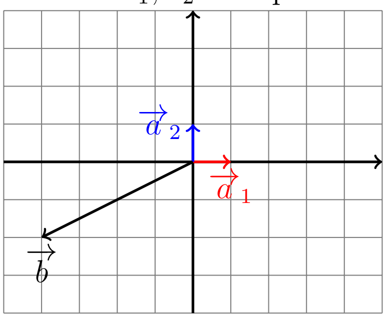
Cette collection d'exercices est longue, pour vous permettre de vous exercer plus. Nous n'attendons pas de vous que vous puissiez les terminer tous en deux heures.

Remarques : il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.

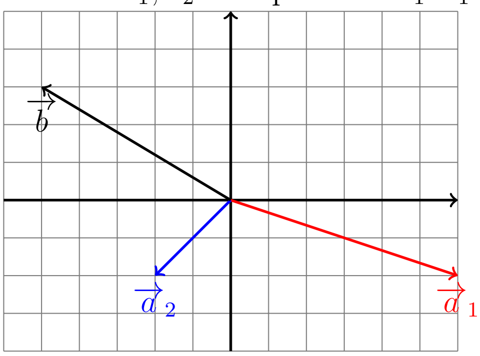
Exercice 1

À l'aide des graphes ci-dessous, trouver les coefficients des combinaisons linéaires demandées. Il se peut qu'il existe plusieurs solutions, ou aucune solution. Dans les graphes ci-dessous, un carré =1 unité.

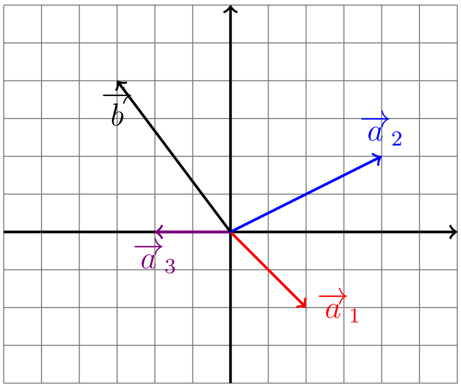
a) Trouver λ_1, λ_2 tels que $\vec{b} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2$



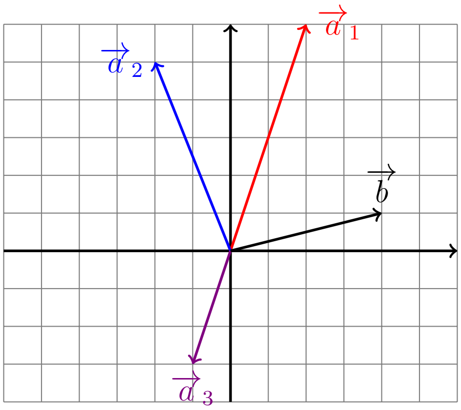
b) Trouver λ_1, λ_2 tels que $\vec{b} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2$



c) Trouver $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que $\vec{b} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3$



d) Trouver $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que $\overrightarrow{b} = \lambda_1 \overrightarrow{a}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{a}_2 + \lambda_3 \overrightarrow{a}_3$. Peut-on trouver μ_1 et μ_3 tels que $\overrightarrow{b} = \mu_1 \overrightarrow{a}_1 + \mu_3 \overrightarrow{a}_3$?



Sol.:

a) $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = -2$

b) $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1/2$

c) Il y a une infinité de solutions. En voici une : $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 = -1/2$

d) Il y a une infinité de solutions. En voici deux : $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$ et $\lambda_3 = -2$ ou $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ et $\lambda_3 = 0$. Non on ne peut pas trouver de μ_1 et μ_3 tels que $\overrightarrow{b}$ soit une combinaison linéaire de $\overrightarrow{a}_1$ et $\overrightarrow{a}_3$, car ces deux vecteurs sont colinéaires.

Une autre méthode est d'écrire les systèmes d'équations qui correspondent aux équations vectorielles à résoudre.

Exercice 2

Considérons les vecteurs $\overrightarrow{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -13 \\ -3 \end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Est-il possible d'écrire $\overrightarrow{b}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{a}_1$ et $\overrightarrow{a}_2$?

b) Donner une interprétation géométrique du résultat.

Sol.:

a) Non. Considérons l'équation linéaire $x_1\overrightarrow{a}_1 + x_2\overrightarrow{a}_2 = \overrightarrow{b}$, d'inconnues x_1, x_2. Le système linéaire correspondant est

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 &= -3 \\ -2x_1 - 13x_2 &= 8 \\ 3x_1 - 3x_2 &= 1 \end{cases}$$

avec pour matrice augmentée

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ -2 & -13 & 8 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

et pour forme échelonnée réduite

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut voir que ce système ne possède pas de solution.

b) Cela signifie que le vecteur $\overrightarrow{b}$ n'appartient pas au plan formé des vecteurs $x_1\overrightarrow{a}_1 + x_2\overrightarrow{a}_2$, avec x_1 et x_2 réels.

Exercice 3

Considérons les vecteurs $\overrightarrow{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Pour quelle(s) valeur(s) de α le vecteur $\overrightarrow{b}$ est-il une combinaison linéaire de $\overrightarrow{a}_1$ et $\overrightarrow{a}_2$?

Sol.: Considérons le système linéaire $x_1\overrightarrow{a}_1 + x_2\overrightarrow{a}_2 = \overrightarrow{b}$. En coordonnées, on obtient le système

$$\begin{cases} x_1 & -3x_2 &= \alpha \\ & x_2 &= -5 \\ -2x_1 & +8x_2 &= -3 \end{cases}$$

avec la matrice augmentée

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & \alpha \\ 0 & 1 & -5 \\ -2 & 8 & -3 \end{pmatrix}.$$

Après des opérations élémentaires sur les lignes, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -15+\alpha \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 7+2\alpha \end{pmatrix}.$$

On voit que le système est compatible si et seulement si $7 + 2\alpha = 0$, i.e. $\alpha = -\frac{7}{2}$. Dans ce cas, la matrice ci-dessus est la forme échelonnée réduite.
(Remarque : Lorsque $7 + 2\alpha \neq 0$, le système est incompatible, et la forme échelonnée réduite est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad)$$

En résumé, le vecteur $\overrightarrow{b}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{a}_1$ et $\overrightarrow{a}_2$ si et seulement si $\alpha = -\frac{7}{2}$.

Exercice 4

Considérons le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & - & 5x_3 & = & 4 \\ x_1 & + & 4x_2 & - & 8x_3 & = & 7 \\ -3x_1 & - & 7x_2 & + & 9x_3 & = & -6. \end{array}\right.$$

a) Écrire le système sous forme matricielle $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$.
b) Écrire le système comme une combinaison linéaire des colonnes de la matrice A.
c) Trouver la solution de l'équation $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$.
d) Subsidiaire : écrire l'ensemble des solutions en fonction d'un paramètre.

Sol.:

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 1 & 4 & -8 \\ -3 & -7 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}$$

b)

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -5 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}$$

c) La matrice augmentée est

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 4 \\ 1 & 4 & -8 & 7 \\ -3 & -7 & 9 & -6 \end{pmatrix},$$

et la forme échelonnée réduite est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La variable x_3 est libre, on peut donc écrire l'ensemble des solutions comme

$$\left\{\begin{array}{ll} x_1 & = -5 - 4x_3 \\ x_2 & = 3 + 3x_3 \\ x_3 & \text{libre} \end{array}\right.$$

d) En posant $x_3 = t \in \mathbb{R}$, on en déduit que les solutions (s_1, s_2, s_3) sont données par

$$s_3 = t,\ t \in \mathbb{R},\ s_1 = -5 - 4t,\ s_2 = 3 + 3t.$$

On en déduit l'ensemble des solutions :

$$\left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 5

Déterminer si les systèmes linéaires homogènes suivants ont une solution non triviale.

a) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 5x_2+ & 8x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & - & 7x_2+ & x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 2x_2+ & 7x_3 & = & 0 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & + & 7x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 9x_3 & = & 0 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -7x_1 & + & 37x_2 & + & 119x_3 & = & 0 \\ 5x_1 & + & 19x_2 & + & 57x_3 & = & 0 \end{array}\right.$

Sol.:

a) La matrice des coefficients est carrée (autant d'équations que d'inconnues) et on peut remarquer que $L_1 = L_2 + L_3$. Il s'agit d'une relation de dépendance linéaire sur les lignes. On obtiendra une ligne de zéros dans la matrice, et il n'y aura pas trois pivots. On a alors au moins une variable libre et donc une infinité de solutions (non-triviales).

On peut aussi résoudre le système. La forme échelonnée réduite de la matrice augmentée est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{17}{8} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sa solution générale est

$$\left\{\begin{array}{rcr} x_1 & = & -\frac{17}{8}x_3 \\ x_2 & = & \frac{3}{4}x_3 \end{array}\right. .$$

Il existe une infinité de solutions non triviales (prendre $x_3 \neq 0$).

b) Forme échelonnée réduite de la matrice augmentée :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution triviale ($x_1 = x_2 = x_3 = 0$).

c) Le système a moins d'équations (deux) que d'inconnues (trois), il ne peut pas y avoir trois pivots. Le système est compatible (on échelonne pour le voir), donc il existe une infinité de solutions.

Exercice 6

Calculer $A(\alpha_1 \overrightarrow{v}_1 + \alpha_2 \overrightarrow{v}_2)$, où

a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3;$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \alpha_1 = -1, \alpha_2 = 1.$$

Sol.:

a)

$$A(\alpha_1 \overrightarrow{v}_1 + \alpha_2 \overrightarrow{v}_2) = \begin{pmatrix} 17 \\ 12 \\ 36 \end{pmatrix}.$$

b)

$$A(\alpha_1 \overrightarrow{v}_1 + \alpha_2 \overrightarrow{v}_2) = \begin{pmatrix} 18 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7

Écrire les solutions des systèmes $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ suivants sous la forme $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{p} + \overrightarrow{v}$, où $\overrightarrow{p}$ est une solution particulière du système, et $\overrightarrow{v}$ est la solution générale du système homogène $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.

a) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 4 \\ x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 7 \\ -3x_1 - 7x_2 + 9x_3 = -6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$

Sol.:

a) Forme échelonnée réduite de la matrice augmentée :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution générale :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Forme échelonnée réduite de la matrice augmentée :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le système est incompatible. Pas de solution !

Exercice 8

Soit $a \in \mathbb{R}$. A l'aide de l'algorithme de réduction (ou de Gauss-Jordan), déterminer les valeurs du paramètre a pour lesquelles le système

$$\begin{cases} ax + (1-a)y + (1-a)z &= a^2 \\ ax + (1+a)y + (1+a)z &= a - a^2 \\ x + y + z &= 1 - a \end{cases}$$

a) n'admet aucune solution,
b) admet une infinité de solutions,
c) admet une solution unique.

Ensuite résoudre le système dans les cas b) et c).

Sol.: On écrit la matrice augmentée du système, en échangeant la première et la dernière ligne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1-a \\ a & 1-a & 1-a & a^2 \\ a & 1+a & 1+a & a-a^2 \end{array}\right) \underset{\text{L3}\to\text{L3}-a\text{L1}}{\overset{\text{L2}\to\text{L2}-a\cdot\text{L1}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1-a \\ 0 & 1-2a & 1-2a & 2a^2-a \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{L2}\leftrightarrow\text{L3}}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1-a \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-2a & 1-2a & 2a^2-a \end{array}\right) \underset{\text{L1}\to\text{L1}-\text{L2}\text{L3}\to\text{L3}-(1-2a)\text{L2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1-a \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2a^2-a \end{array}\right)$$

La matrice est maintenant échelonnée et réduite. On distingue les cas :

- Si $a \neq 0$ et $a \neq 1/2$, le nombre $2a^2 - a$ est non nul. La dernière équation ne peut être vérifiée et le système ne possède pas de solutions. On écrit alors $S = \emptyset$ pour dire que l'ensemble des solutions est vide.

- Si $a = 0$ ou $a = 1/2$, la dernière équation donne $0 = 0$. Il reste alors deux équations à trois inconnues. On a ainsi une infinité de solutions paramètrées par $z \in \mathbb{R}$. On a toujours $x = 1 - a$ et $y = -z$. On choisit z comme inconnue libre, c'est-à-dire comme paramètre et on obtient :
$$S = \{(1-a; -z; z) \mid z \in \mathbb{R}\}$$
Le système possède une droite entière de solutions.

Exercice 9

Trouver la solution générale du système d'équations linéaires homogènes

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4u = 0 \\ 4x + 5y + 6z + 7u = 0 \\ 4x + 2y - 2u = 0 \\ x - y - 3z - 5u = 0 \end{cases}$$

Sol.: La réduction de Gauss–Jordan de la matrice augmentée du système nous donne

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & -5 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_3\to L_3-4L_1 \\ L_4\to L_4-L_1}}{\overset{\sim}{L_2 \to L_2 - 4L_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -9 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & -18 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -9 & 0 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Le système associé s'écrit

$$\begin{cases} x - z - 2u = 0 \\ y + 2z + 3u = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z + 2u \\ y = -2z - 3u \end{cases} \qquad \text{avec } z \text{ et } u \text{ quelconques.}$$

Ainsi, la solution générale dépend de deux paramètres :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{pour tout } s, t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 10

a) Déterminer si les vecteurs $(1,2,3)$, $(2,0,0)$ et $(-2,1,0)$ engendrent $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer si les vecteurs $(2,-1,2)$, $(4,1,3)$ et $(2,2,1)$ engendrent $\mathbb{R}^3$.

Sol.:

Exercice 11

Les vecteurs suivants sont-ils linéairement indépendants ? Engendrent-ils $\mathbb{R}^3$ (questions a) et b)) ou $\mathbb{R}^2$ (question c)) ?

a) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

c) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Sol.:

a) On cherche une combinaison linéaire des vecteurs telle que

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ce qui conduit au système

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & & & = & 0 \\ 2x_1 & & & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & & & & & = & 0 \end{array} \right. .$$

Ce système possède une unique solution triviale $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, donc les vecteurs $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$ sont linéairement indépendants, et ils engendrent $\mathbb{R}^3$.

b) $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$ ne sont pas linéairement indépendants. En effet, $\vec{v}_1 = -\vec{v}_2$. Ainsi ces trois vecteurs n'engendrent pas $\mathbb{R}^3$.

c) $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$ ne sont pas linéairement indépendants, car ils sont de taille 2 strictement inférieure au nombre 3 de vecteurs. Cependant, ces vecteurs sont linéairement indépendants deux à deux, donc ils engendrent $\mathbb{R}^2$.

Remarque

On utilise :

Les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^m$.

$\Leftrightarrow$ *Pour tout vecteur $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^m$, l'équation $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ a une solution $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$ (tout vecteur $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^m$ peut s'exprimer comme combinaison linéaire des colonnes de A).*

$\Leftrightarrow$ *La matrice augmentée n'a pas de ligne de la forme $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & c \end{bmatrix}$ avec c non nul (car le système est compatible) ; la forme échelonnée de A n'a pas de ligne nulle $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ (car $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ a une solution pour tout $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^m$).*

$\Leftrightarrow$ *Chaque ligne a une position pivot.*

Exercice 12

a) Les vecteurs $\overrightarrow{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u}_3 = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont-ils linéairement dépendants ?

b) Les vecteurs $\overrightarrow{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ engendrent-ils $\mathbb{R}^3$?

c) Les vecteurs $\overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ engendrent-ils $\mathbb{R}^4$?

Sol.:

a) On effectue des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice obtenue en plaçant les vecteurs colonne par colonne. On commencera par diviser la première ligne par -8, puis on utilise cette ligne pour obtenir des zéros dans la dernière colonne, enfin on échange les lignes 1 et 3 :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les vecteurs $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ et $\mathbf{u}_3$ ne sont donc pas linéairement dépendants car la matrice échelonnée contient un pivot dans chaque colonne.

b) La matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ -1 & 7 & -2 \end{pmatrix}$ s'échelonne en trois opérations en $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Il y a un pivot dans chaque ligne si bien que tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ s'exprime comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3$.

c) Il y a trop de lignes pour que trois vecteurs de $\mathbb{R}^4$ (ceux-ci ou d'autres) puissent engendrer $\mathbb{R}^4$. Il faudrait quatre pivots dans la matrice de taille 4×3 qu'on construit en plaçant ces vecteurs dans les colonnes, alors qu'il ne peut y en avoir plus de trois.

Exercice 13

Soit A une matrice de taille $m \times n$. Montrer que les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^m$ *si et seulement si* la forme échelonnée de la matrice A a une position pivot dans chaque ligne.

Sol.:

Les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^m$.

$\Leftrightarrow$ Pour tout vecteur $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^m$, l'équation $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ a (au moins) une solution $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$ (tout vecteur $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^m$ peut s'exprimer comme combinaison linéaire des colonnes de A).

$\Leftrightarrow$ La matrice échelonnée augmentée n'a pas de ligne de la forme $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & c \end{bmatrix}$ avec c non nul (car le système est compatible) ; et la forme échelonnée de A n'a pas de ligne nulle $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$.

$\Leftrightarrow$ Chaque ligne a une position pivot.

Reformulation de la solution : soit

$$A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{a}_1 & \cdots & \overrightarrow{a}_n \end{pmatrix}$$

où $\overrightarrow{a}_j \in \mathbb{R}^m, j = 1, \ldots, n$ sont les vecteurs colonnes de A, i.e. $\overrightarrow{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$.

Dire que $\{\overrightarrow{a}_1, \ldots, \overrightarrow{a}_n\}$ engendre $\mathbb{R}^m$ est équivalent à : tout vecteur de $\mathbb{R}^m$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{a}_1, \ldots, \overrightarrow{a}_n$, c-à-d :

$$\forall \overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^m, \exists x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \text{ tels que } \overrightarrow{b} = x_1 \overrightarrow{a}_1 + \ldots + x_n \overrightarrow{a}_n. \tag{1}$$

En forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Ceci est équivalent à dire que pour tout $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^m$, l'équation $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ a au moins une solution $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$. Le système est donc compatible pour tout choix possible de $\overrightarrow{b}$, c-à-d la forme échelonnée de la matrice augmentée n'a pas de ligne de la forme $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & c \end{bmatrix}$ où $c \neq 0$. Puisque c dépend de $\overrightarrow{b}$ et que $\overrightarrow{b}$ est arbitraire, il est possible de trouver un vecteur $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^m$ tel que $c \neq 0$. Donc la seule possibilité de ne pas avoir une telle ligne est qu'il y ait une position pivot dans chaque ligne de A. Vice-versa, s'il y a une position pivot dans chaque ligne de A, ce n'est pas possible d'avoir une ligne du type $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & c \end{bmatrix}$ avec $c \neq 0$.

Considérons par exemple la matrice 2×3 suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

La forme échelonnée de la matrice augmentée est

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 & b_1 \\ 2 & 4 & -2 & b_2 \end{pmatrix} \underset{3L_2-2L_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 3b_2-2b_1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

La dernière ligne est de la forme $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & c \end{bmatrix}$, où $c = 3b_2 - 2b_1$. Donc si $b_2 \neq \frac{2}{3}b_1$ le système est incompatible. En effet, les trois vecteurs colonnes de la matrice A sont colinéaires et n'engendrent pas $\mathbb{R}^2$.

Par contre en prenant la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

et en procèdant de la même manière, on obtient

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 & b_1 \\ 2 & 4 & 2 & b_2 \end{pmatrix} \underset{3L_2-2L_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} \boxed{3} & 6 & -3 & b_1 \\ 0 & 0 & \boxed{12} & 3b_2-2b_1 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Il y a bien une position pivot dans chaque ligne, le système est compatible et les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^2$.