Série 1 (Corrigé)

Remarques : il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.

Exercice 1

Parmi les équations suivantes, déterminer celles qui sont linéaires.

a) $x_1^2 + x_2^2 = 1$
b) $2^2 x_1 + 2^2 x_2 = 1$
c) $\sqrt{3}x_1 + \left(1 - \sqrt{2}\right) x_2 + 3 = \pi x_1$
d) $3x_1 + 2x_2 + 4\, x_3\, x_4 = 5$
e) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) x_1 - 2 = 2x_1 + 4x_2 + \sqrt{3}\, x_3 + x_9$

Sol.:

a) non (x_1^2 et x_2^2 sont non-linéaires)
b) oui
c) oui
d) non ($x_3\, x_4$ est non-linéaire)
e) oui

Exercice 2

Considérons l'équation suivante

$$\alpha x_1 + \beta x_2 = 1.$$

a) Dessiner la solution avec les paramètres $\alpha = 1$, $\beta = 3$.
b) Pour quelles valeurs de α, β la droite $\alpha x_1 + \beta x_2 = 1$ est-elle parallèle à la droite $-x_1 + x_2 = -1$?
c) Trouver les valeurs de α, β (si elles existent) telles que le système

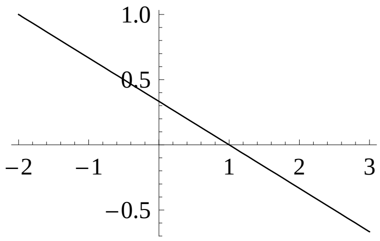
$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} -x_1 & + & x_2 & = & -1 \\ \alpha x_1 & + & \beta x_2 & = & 1 \\ (\alpha - 1)\, x_1 & + & (\beta + 1)\, x_2 & = & 0 \end{array} \right.$$

i) possède une infinité de solutions ;
ii) ne possède aucune solution ;
iii) possède une solution unique.

Sol.:

a)

$$x_2 = \frac{1}{3}(1 - x_1)$$



b) Les droites sont parallèles lorsque les vecteurs normaux aux droites $(\alpha,\, \beta)$ et $(-1,\, 1)$ sont proportionnels i.e. $-\alpha = \beta$, avec $(\alpha,\, \beta) \neq 0$ (pour que la droite existe).

c) Méthode 1 : On constate que l'équation 1 + l'équation 2 nous donne l'équation 3. Ainsi cette denière ne nous donne pas de nouvelles informations. On a alors le système

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 & = -1 \\ \alpha x_1 + \beta x_2 & = 1 \end{cases}$$

En mutlipliant l'équation par α (en supposant que $\alpha \neq 0$)on obtient

$$\begin{cases} -\alpha x_1 + \alpha x_2 & = -\alpha \\ \alpha x_1 + \beta x_2 & = 1 \end{cases} \to \begin{cases} -\alpha x_1 + \alpha x_2 & = -\alpha \\ \alpha x_1 + \beta x_2 & = 1 \end{cases}$$

Méthode 2(avec l'algo de Gauss-Jordan) : En faisant $L_3 \leftarrow L_3 - L_1 - L_2$ puis $L_2 \leftarrow L_2 + \alpha L_1$, on obtient la forme échelonnée de la matrice augmentée :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & \alpha+\beta & -\alpha+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $\alpha + \beta \neq 0$, le système linéaire possède une unique solution. Si $\alpha + \beta = 0$, le système est dit dégénéré. On a alors deux cas possibles : si $-\alpha + 1 \neq 0$ le système ne possède aucune solution (système incompatible) ; si $-\alpha + 1 = 0$ (i.e. $\alpha = 1, \beta = -1$) alors x_2 est une variable libre et il existe une infinité de solutions.

Exercice 3

i) Écrire les matrices augmentées correspondant aux systèmes linéaires suivants.

ii) Résoudre ces systèmes linéaires en utilisant des opérations élémentaires sur les lignes de ces matrices augmentées.

a) $\left\{ \begin{array}{rcrcr} x_1 & - & 2x_2 & = & -1 \\ -x_1 & + & 3x_2 & = & 3 \end{array} \right.$

b) $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 12 \\ x_3 & + & 2x_1 & - & 4x_2 & = & -1 \\ x_2 & + & 2x_3 & - & 4x_1 & = & -8 \end{array} \right.$

c) $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 6x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 11 \\ -3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & -4 \\ 5x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 9 \end{array} \right.$

d) $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & & & = & 5 \\ 5x_3 & - & x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \end{array} \right.$

Sol.:

a) Matrice augmentée : $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$,

Forme échelonnée réduite : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, Solution : $x_1 = 3$, $x_2 = 2$.

b) Matrice augmentée : $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 12 \\ 2 & -4 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & 2 & -8 \end{pmatrix}$,

Forme échelonnée réduite : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, Solution : $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$.

c) Matrice augmentée : $\begin{pmatrix} 6 & -3 & 2 & 11 \\ -3 & 2 & -1 & -4 \\ 5 & -3 & 2 & 9 \end{pmatrix}$,

Forme échelonnée réduite : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, Solution : $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$.

d) Matrice augmentée : $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

Forme échelonnée réduite : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, Solution : $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$.

Exercice 4

Les opérations suivantes sont-elles valides ?

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 - L_2 \\ L_2 - L_1 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_1 - L_2 \\ L_1 - L_3 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sol.:

a) Non, on perd de l'information en faisant deux opérations simultanées sur les lignes.
b) Non. L'information sur x_2 est perdue en multipliant par zéro.
c) Oui. Aucune information n'est perdue en soustrayant une ligne sur une autre (deux fois successivement).

Exercice 5

Montrer que les opérations élémentaires sur les lignes (à savoir, l'ajout d'une ligne à une autre, l'échange de deux lignes, et la multiplication d'une ligne par un réel non nul) transforment un système linéaire en un système équivalent.

Sol.: Considérons la matrice augmentée

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} & b_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} & b_l \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \tag{1}$$

correspondant au système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n & = & b_k \\ \dots \\ a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \dots + a_{ln}x_n & = & b_l \\ \dots \end{cases} \tag{2}$$

Opération 1 (Ajout d'une ligne à une autre) : Le replacement de la ligne l par la somme des lignes l et k ($k \neq l$) donne

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} & b_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{l1}+a_{k1} & a_{l2}+a_{k2} & \dots & a_{ln}+a_{kn} & b_l+b_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix},$$

ce qui correspond au système

$$\begin{cases} \dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n & = & b_k \\ \dots \\ (a_{l1}+a_{k1})x_1 + (a_{l2}+a_{k2})x_2 + \dots + (a_{ln}+a_{kn})x_n & = & b_l + b_k \\ \dots \end{cases} \tag{3}$$

(Cette opération est réversible : si on soustrait la ligne k de la ligne l, on retrouve bien le système initial (**??**).) Montrons que les systèmes sont équivalents. D'une part, si $(s_1, \dots, s_n)$ est une solution du système original, alors $a_{k1}s_1 + a_{k2}s_2 + \dots + a_{kn}s_n = b_k$ et $a_{l1}s_1 + a_{l2}s_2 + \dots + a_{ln}s_n = b_l$. Dès lors, en additionnant ces deux égalités, on a aussi que $(a_{l1}+a_{k1})s_1 + (a_{l2}+a_{k2})s_2 + \dots + (a_{ln}+a_{kn})s_n = b_l + b_k$, et il est alors clair que $(s_1, \dots, s_n)$ est aussi une solution du système modifié (les lignes autres que l et k ne sont pas affectées). D'autre part, si $(s_1, \dots, s_n)$ est une solution du système modifié, alors $a_{k1}s_1 + a_{k2}s_2 + \dots + a_{kn}s_n = b_k$ et $(a_{l1}+a_{k1})s_1 + (a_{l2}+a_{k2})s_2 + \dots + (a_{ln}+a_{kn})s_n = b_l + b_k$. En soustrayant l'une à l'autre, on déduit que $a_{l1}s_1 + a_{l2}s_2 + \dots + a_{ln}s_n = b_l$, et donc $(s_1, \dots, s_n)$ est aussi une solution du système original. (A nouveau, les lignes autres que l et k ne sont pas affectées). Ces deux arguments ensemble montrent bien que les ensembles solutions des deux systèmes sont identiques, car l'un est inclus dans l'autre et vice versa.

Opération 2 (Échange de deux lignes) : Il est évident que l'échange de deux lignes du système donne un système équivalent : on pourrait le formaliser, mais ce n'est pas particulièrement instructif.

Opération 3 (Multiplication d'une ligne par un réel non nul) : Multiplier la ligne k par $\beta \neq 0$ donne

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta a_{k1} & \beta a_{k2} & \dots & \beta a_{kn} & \beta b_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix},$$

correspondant au système

$$\begin{cases} \dots \\ \beta a_{k1}x_1 + \beta a_{k2}x_2 + \dots + \beta a_{kn}x_n \quad = \quad \beta b_k \\ \dots \end{cases}$$

(Cette opération est reversible puisque $\beta \neq 0$: on peut re-diviser par β.) Pour argumenter que les systèmes sont bien équivalents, procédez comme ci-dessus : montrez que toute solution de l'un est une solution de l'autre, et inversément.

Exercice 6

Déterminer la solution générale des systèmes d'équations linéaires suivants :

a) $$\begin{cases} 3x + y - 2z + 4u = 3 \\ x + 2y - z + 7u = 4 \\ 2x + 2y + z + 3u = 4 \\ x - y - z + u = 1 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} 4x + 4y - 3z + 3u = 0 \\ 3x + 2y + z + 2u = 0 \\ 2x + 5z + u = 0 \\ x + 2y - 4z + u = 0 \end{cases}$$

Sol.:

a) L'élimination de Gauss de la matrice augmentée du système nous donne

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{L_1 \to L_1 - L_3}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_3 \to L_3 - 2L_1 \\ L_4 \to L_4 - L_1}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 6 & 5 \\ 0 & 4 & 7 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_3 \to L_3 - L_2 \\ L_4 \to \frac{1}{2} L_4}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{5}{7} \end{array}\right)$$

Le système associé à cette matrice est :

$$\begin{cases} x - y - 3z + u = -1 \\ \phantom{x - {}} y + 5z - 5u = 1 \\ z \phantom{{}+ 5u} = 1 \\ u = \frac{5}{7} \end{cases}$$

Comme $y = 1 - 5 \cdot 1 + 5 \cdot \frac{5}{7} = -\frac{3}{7}$ et $x = -1 + (-\frac{3}{7}) + 3 \cdot 1 - \frac{5}{7} = \frac{6}{7}$, la solution est unique :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} \\ -\frac{3}{7} \\ 1 \\ \frac{5}{7} \end{pmatrix}.$$

b) La réduction de Gauss–Jordan de la matrice augmentée du système nous donne

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 4 & -3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -4 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 \to L_1 - L_2}{\widetilde{\quad}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -4 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \to L_2 - 3L_1 \\ L_3 \to L_3 - 2L_1 \\ L_4 \to L_4 - L_1}}{\widetilde{\quad}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 13 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 13 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \to L_3 - L_2}{\widetilde{\quad}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 13 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{13}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Le système associé à cette matrice est :

$$\begin{cases} x \quad + \frac{5}{2}z + \frac{1}{2}u = 0 \\ \quad y - \frac{13}{4}z + \frac{1}{4}u = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{5}{2}z - \frac{1}{2}u \\ y = \frac{13}{4}z - \frac{1}{4}u \end{cases}$$

Ainsi, la solution générale dépend de deux paramètres et s'écrit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ \frac{13}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{avec } s, t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 7

Montrer que le système d'équations linéaires suivant n'a pas de solution :

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - 2y - z - u = 3 \\ x + 3y + 2z + u = 5 \\ 3x + 4y + 3z + 3u = 7 \end{cases}$$

Sol.: Le calcul nous donne

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 3 & 3 & 7 \end{array}\right) \underset{L_1 \to L_1 - L_2}{\widetilde{\quad}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 3 & 3 & 7 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1}}{\widetilde{\quad}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & -3 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 3 & 4 & 3 & 3 & 7 \end{array}\right)$$

Comme $7 \neq 0$, le système n'a pas de solution.

Exercice 8

a) Vérifier si les matrices suivantes sont sous forme échelonnée ou sous forme échelonnée réduite.
b) Identifier les variables de bases (ou principales) et les variables libres.

c) Déterminer si les systèmes linéaires correspondant possèdent exactement une solution, une infinité de solutions, ou bien aucune.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sol.:

A) forme échelonnée, forme échelonnée réduite. Variables principales : x_1, x_2, x_3. Variables libres : aucune. Solution unique.

B) forme échelonnée, forme échelonnée réduite. Variables principales : x_1, x_2. Variable libre : x_3. Infinité de solutions.

C) forme échelonnée, forme échelonnée réduite. Variables principales : x_1, x_2. Variable libre : x_3. Pas de solution.

D) forme échelonnée, pas une forme échelonnée réduite. Variables principales : x_2, x_3. Variable libre : x_1. Infinité de solutions.

E) pas une forme échelonnée. Infinité de solutions.

Exercice 9

Pour chacun des systèmes suivants :

i) Écrire la matrice augmentée.

ii) Transformer la matrice augmentée sous forme échelonnée réduite.

iii) Identifier les variables de bases et les variables libres, et écrire la solution générale.

a) $\left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & x_2 & = & 8 \\ 4x_1 & - & 3x_2 & = & 6 \end{array} \right.$

b) $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & -1 \end{array} \right.$

c) $\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & & & & & = & 1 \\ & & & & x_3 & & & = & 2 \\ & & & & & & x_4 & = & -1 \end{array} \right.$

d) $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \end{array} \right.$

e) $\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & 2x_5 & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 2 \end{array} \right.$

Sol.:

a) Matrice augmentée :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 4 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

Forme échelonnée réduite :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Variables de bases : x_1 et x_2. Pas de variable libre. Solution générale :

$$\begin{cases} x_1 & = & 3 \\ x_2 & = & 2 \end{cases}$$

b) Matrice augmentée :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Forme échelonnée réduite :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Variables de bases : x_1, x_2, x_3. Pas de variable libre. Solution générale :

$$\begin{cases} x_1 & = & -1 \\ x_2 & = & 1 \\ x_3 & = & 1 \end{cases}$$

c) Matrice augmentée :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Déjà sous forme échelonnée réduite. Variables de bases : x_1, x_3, x_4. Variable libre : x_2. Solution générale :

$$\begin{cases} x_1 & = & 1 - 2x_2 \\ x_3 & = & 2 \\ x_4 & = & -1 \end{cases}$$

d) Matrice augmentée :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Forme échelonnée réduite :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pas de solution. Théoriquement, variable de base : x_1, variables libres : x_2, x_3.

e) Matrice augmentée :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Forme échelonnée réduite :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Variables de bases : x_1, x_4, x_5. Variables libres : x_2, x_3. Solution générale :

$$\begin{cases} x_1 &= 1 - x_2 - x_3 \\ x_4 &= 2 \\ x_5 &= -1 \end{cases}$$