

## Série 13 (Corrigé)

Cette série fait suite aux chapitres 7.1 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay, aussi bien que certains concepts vus au cours.

**Remarques :** il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.

### Exercice 1

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Diagonaliser  $A$  en base orthonormée.

Note : on ne vous demande pas d'être capable de trouver les racines d'un polynôme général de degré 3 ou plus à l'examen ; ici, pour l'exercice, trouvez les racines par essai-erreur et demandez aux assistant.es si cela vous empêche de progresser.

**Sol.:** Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

**Méthode 1** On calcule le polynôme caractéristique  $c_A(t) = \dots = (t - 6)(t - 2)^3$ , et on trouve  $\lambda \in \{6, 2\}$ . **Méthode 2** On voit que la somme de chaque ligne vaut 6. Ainsi

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient que 2 est une valeur propre en utilisant que la somme des valeurs propres donne la trace de  $A$  et le produit des valeurs propres donne le déterminant de  $A$ . On obtient que 6 est une valeur propre et 2 est une valeur propre de multiplicité géométrique 3 puisque la matrice  $A - 2I_4$  est de rang 1. On en conclut sans faire de calculs que  $c_A(t) = (t - 6)(t - 2)^3$ .

On calcule ensuite les espaces propres et on cherche dans chacun d'eux une base orthonormée de vecteurs propres. D'abord

$$E_6 = \text{span} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

On obtient

$$E_2 = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

On utilise alors le procédé de Gram-Schmidt pour que la base de  $E_2$  soit orthonormée :

$$E_2 = \text{span} \left( \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{6}/6 \\ \sqrt{6}/6 \\ -\sqrt{6}/3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{3}/6 \\ \sqrt{3}/6 \\ \sqrt{3}/6 \\ -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \right)$$

La matrice de changement de base suivante est donc orthogonale :

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/6 & \sqrt{3}/6 & 1/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/6 & \sqrt{3}/6 & 1/2 \\ 0 & -\sqrt{6}/3 & \sqrt{3}/6 & 1/2 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

La matrice inverse de  $P$  est la transposée  $P^T$  et la formule du changement de base donne enfin

$$D = P^T A P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

## Exercice 2

Chercher une décomposition en valeurs singulières des matrices suivantes.

i)  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix},$

ii)  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$

**Sol.:**

i) **Méthode 1.** On calcule :  $A^T A = \begin{pmatrix} 9 & -9 \\ -9 & 9 \end{pmatrix}$ . Les valeurs propres de  $A^T A$  sont 18, 0,

avec pour vecteurs propres normalisés associés  $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Ainsi,  $\Sigma =$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{18} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ (on ordonne les valeurs singulières dans l'ordre décroissant), et}$$

on obtient ainsi la matrice orthogonale  $V$  :

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice  $U$  s'obtient en normalisant les vecteurs  $Av_i$  avec  $v_i$  associé à une valeur singulière non nulle, ici il y en a un seul :  $Av_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ . Ainsi

$$u_1 := \frac{1}{\|Av_1\|} Av_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Les autres colonnes de  $U$  s'obtiennent en étendant la famille  $\{u_1\}$  à une base orthonormée de  $\mathbb{R}^3$ . Il faut donc trouver deux vecteurs normés  $u_2, u_3$  orthogonaux solutions de l'équation  $u_1 \cdot x = 0$ . Une base de solution est

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On applique l'algorithme de Gram-Schmidt pour orthonormaliser la famille  $\{w_1, w_2\}$ . On obtient  $u_2 = \frac{1}{\|w_1\|} w_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $w_2 - \frac{w_1 \cdot w_2}{\|w_1\|^2} w_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ , d'où en normalisant  $u_3 = \frac{\sqrt{2}}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ . On obtient ainsi la matrice  $U = (u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} \end{pmatrix}$ . Finalement,

la décomposition  $A = U\Sigma V^T$  s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Remarque : il y a une infinité de solutions possibles pour  $u_2, u_3$ .

**Méthode 2.** On souhaite calculer la décomposition en valeurs singulières de  $A$  qui a plus de lignes que de colonnes. Pour éviter de recourir à l'algorithme de Gram-Schmidt pour compléter la matrice  $U$  (voir Méthode 1), on peut calculer la décomposition en valeurs singulières de la matrice transposée  $B = A^T = \tilde{U}\tilde{\Sigma}\tilde{V}^T$ , puis transposer la décomposition obtenue.

On calcule  $B^T B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ -4 & 8 & -8 \\ 4 & -8 & 8 \end{pmatrix}$ . Les valeurs propres de  $B$  sont  $18, 0, 0$  avec pour vecteurs propres associés  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$ , en choisissant  $v_2, v_3$  de sorte que  $v_2 \cdot v_3 = 0$ . Ainsi,  $\tilde{\Sigma} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et on obtient la matrice  $\tilde{V}$  en normalisant les

vecteurs  $v_1, v_2, v_3$  :

$$\tilde{V} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Ensuite pour la matrice  $\tilde{U}$ , on normalise le vecteur  $Bv_1$  associé à une valeur singulière non nulle. On obtient :

$$u_1 = \frac{1}{\|Bv_1\|} Bv_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

On obtient  $u_2$  en prenant un vecteur unitaire orthogonale à  $u_1$  :  $u_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$  d'où

$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

On aboutit à la décomposition en valeur singulière

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2}{3\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

d'où en transposant

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

ii) On calcule :  $A^T A = \begin{pmatrix} 13 & 12 & 2 \\ 12 & 13 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$ . Les valeurs propres de  $A^T A$  sont 25, 9, 0, avec pour

vecteurs propres normalisés associés  $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $v_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Ainsi,

$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{25} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{9} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$  (on ordonne les valeurs singulières dans l'ordre décroissant), et on obtient ainsi la matrice orthogonale  $V$  :

$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

La matrice  $U$  s'obtient en normalisant les vecteurs  $Av_i$  avec  $v_i$  associé à une valeur singulière non nulle, ici :  $Av_1 = \frac{5}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $Av_2 = \frac{3}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Ainsi

$$u_1 = \frac{1}{\|Av_1\|} Av_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_2 = \frac{1}{\|Av_2\|} Av_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On obtient ainsi la matrice  $U = (u_1, u_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ . Finalement, la décomposition  $A = U\Sigma V^T$  s'écrit

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

### Exercice 3

Soit  $A$  une matrice de taille  $n \times n$ .

- i) Montrer que  $A$  est inversible si et seulement si  $A$  possède  $n$  valeurs singulières non nulles.
- ii) Si  $A$  est inversible et  $U\Sigma V^T$  est une décomposition en valeurs singulières de  $A$ , donner une décomposition en valeurs singulières de  $A^{-1}$ .

**Sol.:**

- i) On a  $A = U\Sigma V^T$  avec  $U, V$  des matrices orthogonales de taille  $n \times n$  et  $\Sigma$  la matrice diagonale des valeurs singulières. On a  $\det(A) = \det(U) \det(\Sigma) \det(V)$ , avec  $\det(U) \neq 0$  et  $\det(V) \neq 0$  (car  $U$  et  $V$  sont inversibles), ainsi

$$\det(A) \neq 0 \iff \det(\Sigma) \neq 0$$

et  $A$  est inversible si et seulement si ses valeurs singulières sont non nulles.

- ii) On a  $A = U\Sigma V^T$  avec  $U, V$  des matrices orthogonales de taille  $n \times n$  et  $\Sigma$  la matrice diagonale des valeurs singulières, inversible d'après la question i). Ainsi, en inversant cette relation (on utilise  $U^{-1} = U^T$  et  $V^{-1} = V^T$ ), on obtient la décomposition en valeurs singulières cherchée  $A^{-1} = V\Sigma^{-1}U^T$ .

### Exercice 4

Calculer les produits matriciels suivants :

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (1 \ 2 \ 3); \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \ 2); \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} (1 \ 3 \ 5).$$

En déduire le théorème suivant : Si  $A$  est une matrice  $m \times n$  et  $B$  une matrice  $n \times p$ , alors le produit  $AB$  peut être obtenu par la formule colonne-ligne suivante :

$$AB = \text{col}_1(A)\text{lig}_1(B) + \dots + \text{col}_n(A)\text{lig}_n(B), \quad (1)$$

où  $\text{col}_k(A)$  est la matrice  $m \times 1$  correspondant à la  $k^{\text{ème}}$  colonne de la matrice  $A$ , et  $\text{lig}_k(B)$  est la matrice  $1 \times p$  correspondant à la  $k^{\text{ème}}$  ligne de la matrice  $B$ .

Souvenez-vous de cette propriété du produit matriciel : on l'a utilisée en conjonction avec le théorème spectral et avec le théorème de la décomposition en valeurs singulières pour écrire une matrice  $A$  comme une somme de plusieurs matrices simples :  $A = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{v}_i \vec{v}_i^T$  (pour une matrice symétrique) et  $A = \sum_{i=1}^{\min(m,n)} \sigma_i \vec{u}_i \vec{v}_i^T$  (pour une matrice quelconque). Faites explicitement le lien avec cet exercice.

**Sol.:**

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (1 \ 2 \ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \ 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} (1 \ 3 \ 5) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 12 & 20 \end{pmatrix}.$$

*Preuve du théorème :* Soit  $C$  la matrice  $m \times p$  définie par le produit  $C = AB$ . Pour  $i \in \{1, \dots, m\}$  et  $j \in \{1, \dots, p\}$ , on a

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}.$$

On définit désormais, pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ , la matrice  $C^{(k)}$ , de taille  $m \times p$ , donnée par  $C^{(k)} = \text{col}_k(A) \text{lig}_k(B)$ . La matrice  $C^{(k)}$  s'écrit

$$C^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{1k}b_{k1} & \cdots & a_{1k}b_{kp} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{mk}b_{k1} & \cdots & a_{mk}b_{kp} \end{pmatrix},$$

i.e. on a  $c_{ij}^{(k)} = a_{ik}b_{kj}$ . On s'aperçoit alors que

$$\left( \sum_{k=1}^n C^{(k)} \right)_{ij} = \sum_{k=1}^n c_{ij}^{(k)} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} = c_{ij},$$

ce qui conclut la preuve.

### Exercice 5

Ceci est un autre exercice de base concernant les produits matriciels, pour nous assurer que la différence entre  $\vec{u}^T \vec{v}$  et  $\vec{u} \vec{v}^T$  est bien claire.

On peut considérer tout vecteur de  $\mathbb{R}^n$  comme une matrice de dimension  $n \times 1$ . Soient les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  de  $\mathbb{R}^3$  :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

On appelle  $\vec{u}^T \vec{v}$  produit scalaire (ou produit intérieur) des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

- Ecrire  $\vec{u}^T$  et  $\vec{v}^T$ .
- Quelle est la taille des deux matrices produits  $\vec{u}^T \vec{v}$  et  $\vec{v}^T \vec{u}$  ?
- Ces deux produits sont-ils égaux ? Pourquoi ?

Le produit  $\vec{u} \vec{v}^T$  est appelé produit extérieur.

- Quelle est la taille des deux matrices produits  $\vec{u} \vec{v}^T$  et  $\vec{v} \vec{u}^T$  ?
- Ces deux produits sont-ils égaux ? Pourquoi ?

**Sol.:**

- a)  $\vec{u}^T = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$  et  $\vec{v}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ .
- b) La matrice  $\vec{u}^T$  est une matrice  $1 \times 3$  et la matrice  $\vec{v}$  est une matrice  $3 \times 1$ . La taille du produit  $\vec{u}^T \vec{v}$  est donc  $1 \times 1$ . Même chose pour la taille du produit  $\vec{v}^T \vec{u}$ .
- c) Ces deux produits sont transposés l'un de l'autre, comme ils sont de taille  $1 \times 1$ , ils sont égaux.
- d) La matrice  $\vec{u}$  est une matrice  $3 \times 1$  et la matrice  $\vec{v}^T$  est une matrice  $1 \times 3$ . La dimension du produit  $\vec{u} \vec{v}^T$  est donc  $3 \times 3$ . Même chose pour la dimension du produit  $\vec{v} \vec{u}^T$ .
- e) Non. Les produits sont transposés l'un de l'autre, mais ici on a des matrices  $3 \times 3$ . En général une matrice n'est pas égale à sa transposée. Pour le démontrer, le plus simple est de donner un contre-exemple concret. On peut choisir par exemple  $a = 1, b = c = 0$ . Les deux matrices  $3 \times 3$  sont alors distinctes.

---

Copyright © Prof(s). de la section de mathématiques EPFL (Assyr Abdulle, Jérôme Scherer, ...). Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre: D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications*. De Boeck, Bruxelles, 2005.