

## Série 12 (Corrigé)

Cette série fait suite aux chapitres 6.4 6.5 6.6 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay, aussi bien que certains concepts vus au cours.

**Remarques :** il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.

### Exercice 1

Déterminer la solution au sens des moindres carrés de  $A\vec{x} = \vec{b}$

a) en utilisant l'équation normale lorsque

$$\text{i) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\text{ii) } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{iii) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix};$$

b) en utilisant la méthode QR lorsque

$$\text{i) } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{ii) } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Sol.:**

a) en utilisant l'équation normale.

$$\text{i) L'équation normale } A^T A \vec{x} = A^T \vec{b} \text{ est } \begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 8 & 10 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix},$$

$$\text{elle a pour solution } \vec{x} = \begin{pmatrix} 5/14 \\ 5/7 \end{pmatrix}.$$

$$\text{ii) } A^T A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}, A^T \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{iii) } A^T A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, A^T \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 14 \\ -5 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 14/3 \\ -5/3 \end{pmatrix}.$$

b) en utilisant la méthode QR.

- i) Les colonnes de la matrice  $A$  sont linéairement indépendantes, donc décomposer  $A$  selon  $A = QR$  et résoudre  $R\vec{x} = Q^T \vec{b}$  est équivalent à résoudre l'équation normale. La décomposition est donnée par

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 3/\sqrt{22} \\ 0 & -2/\sqrt{22} \\ -1/\sqrt{2} & 3/\sqrt{22} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{11/2} \end{pmatrix}.$$

L'approximation  $\vec{x}$  au sens des moindres carrés est la solution du système  $R\vec{x} = Q^T \vec{b}$ , où  $Q^T \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2/\sqrt{22} \end{pmatrix}$ . Ainsi,  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1/11 \\ -2/11 \end{pmatrix}$ .

- ii) Ici de même, les colonnes de la matrice  $A$  sont linéairement indépendantes, donc décomposer  $A$  selon  $A = QR$  et résoudre  $R\vec{x} = Q^T \vec{b}$  est équivalent à résoudre l'équation normale. La décomposition a également été calculée à l'exercice 4 (question a)) et est donnée par

$$Q = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On trouve } Q^T \vec{b} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} 11/9 \\ -2/3 \end{pmatrix}.$$

## Exercice 2

Soit  $A$  une matrice de taille  $m \times n$ .

- a) Montrer que  $\text{Ker} A = \text{Ker}(A^T A)$ .  
b) Montrer que  $A^T A$  est inversible si et seulement si les colonnes de  $A$  sont linéairement indépendantes.

**Sol.:**

- a) Si  $A\vec{x} = \vec{0}$ , alors  $A^T A\vec{x} = \vec{0}$ , ce qui montre  $\text{Ker} A \subset \text{Ker}(A^T A)$ . Soit maintenant  $\vec{x}$  tel que  $A^T A\vec{x} = \vec{0}$ , alors  $\vec{x}^T A^T A\vec{x} = 0$ . Or,  $\vec{x}^T A^T A\vec{x} = (A\vec{x})^T (A\vec{x}) = \|A\vec{x}\|^2$ . Ainsi,  $A\vec{x} = \vec{0}$ , et  $\text{Ker}(A^T A) \subset \text{Ker} A$ . D'où l'égalité.

- b) Les colonnes de  $A = (\vec{a}_1 \dots \vec{a}_n)$  sont linéairement indépendantes

$$\iff (\beta_1 \vec{a}_1 + \dots + \beta_n \vec{a}_n = \vec{0} \Rightarrow \beta_1 = \dots = \beta_n = 0)$$

$$\iff \left( A \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \vec{0} \right)$$

$$\iff \text{Ker} A = \{ \vec{0} \}.$$

Ainsi, d'après a), les colonnes de  $A$  sont linéairement indépendantes si et seulement si  $\text{Ker}(A^T A) = \{\vec{0}\}$ , c'est-à-dire la matrice (carrée)  $A^T A$  est inversible.

### Exercice 3

On considère les points

$x_i$	2	5	6	8
$y_i$	1	2	3	3

On suppose que la relation entre les  $x_i$  et les  $y_i$  suit une loi  $y = ax + b$ . Calculer  $a$  et  $b$  au sens des moindres carrés.

**Sol.:** Le système linéaire correspondant est  $\vec{y} = A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  où  $A$  est donnée par  $A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \\ x_4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \\ 6 & 1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$ , et  $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ . L'équation normale correspondante est  $A^T A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = A^T \vec{y}$ . On obtient la solution  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{25} \\ \frac{9}{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.36 \\ 0.36 \end{pmatrix}$ .

### Exercice 4

Calculer le volume du parallélépipède dont un sommet se trouve à l'origine et les trois sommets adjacents se trouvent en  $(1, 4, 0)$ ,  $(-2, -5, 2)$  et  $(-1, 2, -1)$ .

**Sol.:** Le parallélépipède décrit est supporté par les vecteurs  $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Ainsi son volume est la valeur absolue du déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

On trouve 15.

### Exercice 5

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

- L'ensemble des solutions au sens des moindres carrés de  $A\vec{x} = \vec{b}$  coïncide avec l'ensemble non vide des solutions de l'équation normale  $A^T A\vec{x} = A^T \vec{b}$ .
- Soit  $A$  une matrice  $m \times n$  et  $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ . Le problème général des moindres carrés consiste à trouver un  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  qui rend  $A\vec{x}$  aussi proche que possible de  $\vec{b}$ .
- Soit  $V$  un espace euclidien et soit  $(\vec{u}, \vec{v})$  le produit scalaire de deux vecteurs  $\vec{u}, \vec{v} \in V$ . Alors  $(\vec{u} \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w}) \cdot (\vec{v}, \vec{w})$  pour tous  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ .

d) L'espace  $\mathbb{R}^n$  muni du produit scalaire classique est un espace euclidien.  $\square \square$

**Sol.:** Vrai : a), b), d). Faux : c).

a) Vrai. Posons  $\hat{b} = \text{proj}_{\text{Im}(A)}(b)$  la projection orthogonale de  $b$  sur l'espace des colonnes de  $A$  (c'est-à-dire l'image de  $A$ ). Comme le système  $Ax = \hat{b}$  est compatible, il admet au moins une solution  $\hat{x}$ , et un vecteur  $\hat{x}$  vérifie  $A\hat{x} = \hat{b}$  si et seulement si  $\hat{x}$  est solution au sens des moindres carrés de  $Ax = b$ . Soit donc  $\hat{x}$  tel que  $A\hat{x} = \hat{b}$  et montrons que  $A^T A\hat{x} = A^T b$ . Comme  $\hat{b}$  est le projeté orthogonal de  $b$  sur  $\text{Im}(A)$  on a que  $b - \hat{b}$  est orthogonal à toute colonne  $a_i$  de  $A$ . Ainsi  $a_i \cdot (b - \hat{b}) = 0$  et comme  $(a_i)^T$  sont les lignes de  $A^T$  on obtient que  $A^T(b - \hat{b}) = 0$  ou encore  $A^T b - A^T A\hat{x} = 0$  ce qui donne  $A^T A\hat{x} = A^T b$ .

Réciproquement, si  $\hat{x}$  vérifie  $A^T A\hat{x} = A^T b$  alors  $A^T(b - A\hat{x}) = 0$  et donc  $b - A\hat{x}$  est orthogonal aux lignes de  $A^T$  c'est-à-dire aux colonnes de  $A$ . Donc  $b - A\hat{x}$  est orthogonal à  $\text{Im}(A)$  et  $b = A\hat{x} + (b - A\hat{x})$  donne une décomposition de  $b$  en somme d'un vecteur de  $\text{Im}(A)$  et un vecteur orthogonal à  $\text{Im}(A)$ . Par unicité d'une telle décomposition on a que  $A\hat{x}$  est le projeté orthogonal de  $b$  sur  $\text{Im}(A)$  c'est-à-dire  $A\hat{x} = \hat{b}$  et  $\hat{x}$  est solution au sens des moindres carrés.

b) Vrai. Par définition d'une solution au sens des moindres carrés, il s'agit de trouver (au moins) un  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\|A\vec{x} - \vec{b}\|$  soit le plus petit possible.

c) Faux. Prenons  $V = \mathbb{R}^2$   $\vec{u} = \vec{0}$  et  $\vec{v} = e_1 = \vec{w}$ . Alors  $(\vec{u} + \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{e}_1, \vec{e}_1) = 1$  tandis que  $(\vec{u}, \vec{w}) \cdot (\vec{v}, \vec{w}) = 0 \cdot 1 = 0$ .

d) Vrai : L'espace  $\mathbb{R}^n$  muni du produit scalaire classique est un espace euclidien. Les axiomes d'espace euclidien reprenant les propriétés algébriques de  $\mathbb{R}^n$  muni du produit scalaire usuel il s'agit d'une vérification immédiate.

## Exercice 6

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

a) Soit  $A$  une matrice  $n \times n$  qui peut se factoriser selon la factorisation  $QR$  comme  $A = QR$ . Alors,  $Q^T A = R$ .

b) Soit  $W$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $\hat{y}$  la projection orthogonale de  $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$  sur  $W$ . Alors  $\hat{y}$  dépend du choix de la base de  $W$ .

c) Soit  $W$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , tel que  $W = \text{Span}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ . Si  $\vec{z} \in \mathbb{R}^n$  satisfait  $\vec{z} \perp \vec{w}_1$  et  $\vec{z} \perp \vec{w}_2$ , alors  $\vec{z} \in W^\perp$ .

d) Soit  $W$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $\vec{y} \in W$ , alors sa projection orthogonale sur  $W$  est  $\vec{p}_W(\vec{y}) = \vec{y}$ .

**Sol.:** Vrai : a), c), d). Faux : b).

a) Vrai. Si  $A = QR$  avec  $Q$  orthogonale alors  $QQ^T = Q^T Q = I_n$  et donc  $Q^T A = Q^T QR = I_n R = R$ .

b) Faux. Par définition  $\hat{y} = \vec{p}_W \vec{y}$  est le vecteur de  $W$  qui est le plus proche de  $y$  (selon la distance euclidienne), il ne dépend donc pas de la base de  $W$  choisie.

c) Vrai. Soit  $W = \text{Span}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$  et soit  $\vec{z} \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\vec{z} \perp \vec{w}_1$  et  $\vec{z} \perp \vec{w}_2$ . Montrons que  $\vec{z} \in W^\perp$ . Soit  $\vec{w} \in W$ , il existe  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  tels que  $\vec{w} = \lambda_1 \vec{w}_1 + \lambda_2 \vec{w}_2$  donc  $\langle \vec{z}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{z}, \lambda_1 \vec{w}_1 + \lambda_2 \vec{w}_2 \rangle = \lambda_1 \langle \vec{z}, \vec{w}_1 \rangle + \lambda_2 \langle \vec{z}, \vec{w}_2 \rangle = 0$ .

- d) Vrai. Par définition  $\vec{p}_W(\vec{y})$  est le vecteur de  $W$  le plus proche de  $\vec{y}$  (pour la distance euclidienne). Si  $\vec{y} \in W$  on a donc  $\vec{p}_W(\vec{y}) = \vec{y}$ .

### Exercice 7

Soit  $A$  une matrice symétrique de taille  $n \times n$ .

- a) Montrer que  $A\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot A\vec{u}$  pour tous  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ .  
 b) Donner un contre-exemple à a) pour une matrice carrée quelconque, en trouvant une matrice  $B$  de taille  $2 \times 2$  telle que  $B\vec{v} \cdot \vec{u} \neq \vec{v} \cdot B\vec{u}$  en général.

**Sol.:**

- a) En effet,  $A\vec{v} \cdot \vec{u} = (A\vec{v})^T \vec{u} = \vec{v}^T A^T \vec{u} = \vec{v}^T A \vec{u} = \vec{v} \cdot A\vec{u}$ .  
 b) Par exemple,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . On a  $B\vec{v} \cdot \vec{u} \neq \vec{v} \cdot B\vec{u}$  pour  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

### Exercice 8

Diagonaliser les matrices suivantes sous la forme  $A = QDQ^T$ , avec  $Q$  une matrice orthogonale.

- a)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  
 b)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Sol.:**

- a)  $A$  est une matrice symétrique réelle, elle est donc diagonalisable en base orthonormale d'après le théorème spectral. On trouve

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

- b) De même,  $A$  est une matrice symétrique réelle, elle est donc diagonalisable en base orthonormale d'après le théorème spectral. On trouve

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

### Exercice 9

Soit  $A$  une matrice symétrique de taille  $n \times n$ .

- i) Montrer qu'il existe une base orthonormale  $\{u_1, \dots, u_n\}$  de  $\mathbb{R}^n$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  tels que

$$A = \lambda_1 u_1 u_1^T + \lambda_2 u_2 u_2^T + \dots + \lambda_n u_n u_n^T.$$

ii) Calculer la décomposition ci-dessus pour  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Sol.:**

i) **Méthode 1.** On applique le théorème spectral à la matrice symétrique  $A$ . Il existe une matrice orthogonale  $Q$  et une matrice diagonale  $D$  telles que

$$A = QDQ^T.$$

On note  $Q = (u_1, \dots, u_n)$  les colonnes de  $Q$ , et on pose  $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ . Comme  $Q$  est une matrice orthogonale,  $(u_1, \dots, u_n)$  est une base orthonormée. De plus, on a

$$\begin{aligned} A &= QDQ^T = (u_1, \dots, u_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{pmatrix} \\ &= (u_1, \dots, u_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 u_1^T \\ \vdots \\ \lambda_n u_n^T \end{pmatrix} = \lambda_1 u_1 u_1^T + \dots + \lambda_n u_n u_n^T. \end{aligned}$$

**Méthode 2.** Soit  $\{u_1, \dots, u_n\}$  une base orthonormale de  $\mathbb{R}^n$  donnée par le théorème spectral appliqué à  $A$ , c-à-d vérifiant  $Au_k = \lambda_k u_k$  pour tout  $k$  où  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont les valeurs propres.

Pour montrer que deux matrices sont égales, il suffit de montrer que leurs produits avec tout vecteur  $v \in \mathbb{R}^n$  coïncident. Comme  $\{u_1, \dots, u_n\}$  est une base, tout vecteur  $v$  se décompose sous la forme  $v = \sum_{k=1}^n \alpha_k u_k$ . On calcule :

$$Av = \sum_{k=1}^n \alpha_k Au_k = \sum_{k=1}^n \alpha_k \lambda_k u_k$$

et

$$\left( \sum_{l=1}^n \lambda_l u_l u_l^T \right) \sum_{k=1}^n \alpha_k u_k = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n \lambda_l u_l u_l^T \alpha_k u_k = \sum_{k=1}^n \alpha_k \lambda_k u_k u_k^T u_k = \sum_{k=1}^n \alpha_k \lambda_k u_k,$$

où l'on a utilisé  $u_l^T u_k = u_l \cdot u_k = 0$  pour  $l \neq k$  et  $u_k \cdot u_k = 1$ . On obtient ainsi l'égalité des deux matrices  $A$  et  $\left( \sum_{l=1}^n \lambda_l u_l u_l^T \right)$ .

ii) Les valeurs propres sont  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 0$ . Les vecteurs propres associés sont  $u_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ ,  $u_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ . On a donc la décomposition

$$A = \lambda_1 u_1 u_1^T + \lambda_2 u_2 u_2^T = 2 \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

## Exercice 10

On suppose que  $A$  est une matrice symétrique réelle de taille  $n \times n$ .

- a) Montrer qu'il existe une base orthonormale  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$  de  $\mathbb{R}^n$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  (pas forcément distincts) tels que

$$A = \lambda_1 \vec{u}_1 \vec{u}_1^T + \lambda_2 \vec{u}_2 \vec{u}_2^T + \dots + \lambda_n \vec{u}_n \vec{u}_n^T. \quad (1)$$

Cette expression est appelée décomposition spectrale de  $A$ .

- b) Calculer la décomposition spectrale et vérifier l'égalité (1) pour

$$\text{i) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{ii) } A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Sol.:**

- a) **Méthode 1 :** On applique le théorème spectral à la matrice symétrique réelle  $A$ . Il existe une matrice orthogonale  $Q$  et une matrice diagonale  $D$  telles que

$$A = QDQ^T.$$

On note  $Q = (\vec{u}_1 \dots \vec{u}_n)$  les colonnes de  $Q$ , et on pose  $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ . Comme  $Q$  est une matrice orthogonale,  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$  est une base orthonormale. De plus,

$$\begin{aligned} A &= QDQ^T = (\vec{u}_1 \dots \vec{u}_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_1^T \\ \vdots \\ \vec{u}_n^T \end{pmatrix} \\ &= (\vec{u}_1 \dots \vec{u}_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 \vec{u}_1^T \\ \vdots \\ \lambda_n \vec{u}_n^T \end{pmatrix} = \lambda_1 \vec{u}_1 \vec{u}_1^T + \dots + \lambda_n \vec{u}_n \vec{u}_n^T. \end{aligned}$$

**Méthode 2 :** Soit  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$  une base orthonormale de  $\mathbb{R}^n$  donnée par le théorème spectral appliqué à  $A$ , c-à-d vérifiant  $A\vec{u}_k = \lambda_k \vec{u}_k$  pour tout  $k$ , où  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont les valeurs propres de  $A$ . Pour montrer que deux matrices sont égales, il suffit de montrer que leurs produits avec tout vecteur  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  coïncident. Comme  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$  est une base, tout vecteur  $\vec{v}$  se décompose sous la forme  $\vec{v} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \vec{u}_k$ . On calcule

$$A\vec{v} = \sum_{k=1}^n \alpha_k A\vec{u}_k = \sum_{k=1}^n \alpha_k \lambda_k \vec{u}_k$$

et

$$\left( \sum_{l=1}^n \lambda_l \vec{u}_l \vec{u}_l^T \right) \vec{v} = \left( \sum_{l=1}^n \lambda_l \vec{u}_l \vec{u}_l^T \right) \sum_{k=1}^n \alpha_k \vec{u}_k = \sum_{k=1}^n \alpha_k \sum_{l=1}^n \lambda_l \vec{u}_l \vec{u}_l^T \vec{u}_k = \sum_{k=1}^n \alpha_k \lambda_k \vec{u}_k,$$

où l'on a utilisé  $\vec{u}_l^T \vec{u}_k = \vec{u}_l \cdot \vec{u}_k = 0$  pour  $l \neq k$  et  $\vec{u}_k \cdot \vec{u}_k = 1$ . On obtient ainsi l'égalité des deux matrices  $A$  et  $\left( \sum_{l=1}^n \lambda_l \vec{u}_l \vec{u}_l^T \right)$ .

- b) i) Il faut en effet calculer les valeurs propres et une base orthonormale de vecteurs propres.  
On obtient

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1,$$

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie explicitement l'égalité donnée par la décomposition spectrale :

$$\begin{aligned} & \lambda_1 \vec{u}_1 \vec{u}_1^T + \lambda_2 \vec{u}_2 \vec{u}_2^T + \lambda_3 \vec{u}_3 \vec{u}_3^T \\ &= -1 \cdot \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \\ & \quad + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A. \end{aligned}$$

- ii) On procède comme en i) et on obtient

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 10,$$

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1/(3\sqrt{2}) \\ -1/(3\sqrt{2}) \\ 4/(3\sqrt{2}) \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

On vérifie également explicitement que

$$\lambda_1 \vec{u}_1 \vec{u}_1^T + \lambda_2 \vec{u}_2 \vec{u}_2^T + \lambda_3 \vec{u}_3 \vec{u}_3^T = A.$$

### Exercice 11

Soit  $A$  une matrice symétrique inversible. Montrer qu'alors l'inverse de  $A$  est aussi symétrique.

Contrairement au solutionnaire, on vous recommande ici d'utiliser le théorème spectral.

**Sol.:** Nous avons montré que  $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$  pour toute matrice inversible  $A$ . Supposons maintenant que  $A$  est symétrique, i.e.  $A = A^T$ . Alors

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}$$

Nous avons montré que  $A^{-1}$  est symétrique.

Copyright © Prof(s). de la section de mathématiques EPFL (Assyr Abdulle, Jérôme Scherer, ...). Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre: D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications*. De Boeck, Bruxelles, 2005.