

## Série 11 (Corrigé)

Cette série fait suite aux chapitres 6.1 6.2 6.3 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay, aussi bien que certains concepts vus au cours.

**Remarques :** il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.

### Exercice 1

Soient les vecteurs

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Par “meilleure approximation”, on veut dire “le vecteur le plus proche”. La distance entre le vecteur et sa meilleure approximation (= sa projection orthogonale) dans un sous-espace est ce qu’on appelle la distance entre le vecteur et le sous-espace. Il existe de nombreuses façon de calculer cette meilleure approximation : commencez avec l’approche basique comme vue en classe. Plus tard, on verra aussi des façons de procéder via moindres carrés (les équations normales) et Gram-Schmidt : cela est aussi expliqué dans les solutions, mais vous pouvez revisiter cela plus tard, quand on en aura parlé en classe.

- Trouver la meilleure approximation de  $\vec{v}$  par un vecteur de la forme  $\alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2$ .
- Calculer la distance entre  $\vec{v}$  et  $\text{Span}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ .

Soient maintenant les vecteurs

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- Trouver la meilleure approximation de  $\vec{v}$  par un vecteur de la forme  $\alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2$ .
- Calculer la distance entre  $\vec{v}$  et  $\text{Span}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ .

**Sol.:**

- Soit  $W = \text{Span}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ . La meilleure approximation  $\vec{w} = \alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2$  de  $\vec{v}$  correspond à la projection orthogonale  $\vec{p}_W(\vec{v})$ . **Attention**, ici  $\vec{w}_1$  et  $\vec{w}_2$  ne sont pas orthogonaux ( $\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2 \neq 0$ ).

**Méthode 1 :** La projection orthogonale est déterminée par  $\vec{w} \in W$  et  $\vec{v} - \vec{w} \in W^\perp$  :

$$\begin{cases} (\vec{w} - \vec{v}) \cdot \vec{w}_1 = 0 \\ (\vec{w} - \vec{v}) \cdot \vec{w}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1 + \beta \vec{w}_2 \cdot \vec{w}_1 = \vec{v} \cdot \vec{w}_1 \\ \alpha \vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2 + \beta \vec{w}_2 \cdot \vec{w}_2 = \vec{v} \cdot \vec{w}_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8\alpha + 6\beta = 4 \\ 6\alpha + 6\beta = 5 \end{cases} .$$

La solution est  $\alpha = -1/2, \beta = 4/3$ . Par conséquent,  $\vec{w} = -\frac{1}{2}\vec{w}_1 + \frac{4}{3}\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 1/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$ .

**Méthode 2 :** Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ . On doit trouver la meilleure approximation de  $\vec{v}$  sous la forme  $A\vec{x}$ , où  $\vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ . L'équation normale pour la solution au sens des moindres carrés de  $A\vec{x} = \vec{v}$  est

$$A^T A \vec{x} = A^T \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} 8\alpha + 6\beta = 4 \\ 6\alpha + 6\beta = 5 \end{cases} .$$

On conclut comme dans la méthode 1.

**Méthode 3 :** On applique la méthode de Gram-Schmidt pour orthogonaliser la famille  $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ . On pose  $\vec{u}_1 = \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $\vec{u}_2 = \vec{w}_2 - \frac{\vec{w}_2 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ . La famille  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$  forme alors une base orthogonale de  $W$ . On a ainsi  $\vec{p}_W(\vec{v}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2} \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 1/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$ . Puisque  $\vec{w}_1$  et  $\vec{w}_2$  ne sont pas orthogonaux, cette méthode ne permet pas directement de trouver les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$ , il faut résoudre le système supplémentaire  $A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \vec{p}_W(\vec{v})$ . On retrouve le même résultat.

b)  $\|\vec{v} - \vec{p}_W(\vec{v})\| = \left\| \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} \right\| = \frac{2}{\sqrt{3}}$ .

c) On pose à nouveau  $W = \text{Span}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ . On remarque que les vecteurs  $\vec{w}_1$  et  $\vec{w}_2$  sont orthogonaux. On peut ainsi facilement calculer la projection orthogonale.

$$\vec{p}_W(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3/2 \end{pmatrix} .$$

Puisque les vecteurs  $\vec{w}_1$  et  $\vec{w}_2$  sont ici orthogonaux, le calcul de

la projection orthogonale fournit directement les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$ . On trouve  $\alpha = 1/2$  et  $\beta = 0$ .

d)  $\|\vec{v} - \vec{p}_W(\vec{v})\| = \sqrt{\frac{35}{2}}$ .

## Exercice 2

Soient  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$  et  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$  deux bases orthonormales de  $\mathbb{R}^n$ . On définit les matrices de taille  $n \times n$ ,  $U = (\vec{u}_1 \dots \vec{u}_n)$  et  $V = (\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n)$ . Montrer que  $U^T U = I_n$ ,  $V^T V = I_n$  et que  $UV$  est inversible.

**Sol.:**

$$\begin{aligned}
 U^T U &= \begin{pmatrix} \vec{u}_1^T \\ \vec{u}_2^T \\ \vdots \\ \vec{u}_n^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \cdots & \vec{u}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{u}_1^T \vec{u}_1 & \vec{u}_1^T \vec{u}_2 & \cdots & \vec{u}_1^T \vec{u}_n \\ \vec{u}_2^T \vec{u}_1 & \vec{u}_2^T \vec{u}_2 & \cdots & \vec{u}_2^T \vec{u}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{u}_n^T \vec{u}_1 & \vec{u}_n^T \vec{u}_2 & \cdots & \vec{u}_n^T \vec{u}_n \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I_n.
 \end{aligned}$$

Comme  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$  vérifient les mêmes hypothèses, on a également  $V^T V = I_n$ .  
 $UV$  est inversible car  $V^T U^T UV = V^T V = I_n$ , d'où  $(UV)^{-1} = V^T U^T$ .

### Exercice 3

- Montrer que si  $Q$  est une matrice orthogonale, alors  $Q^T$  est aussi une matrice orthogonale.
- Montrer que si  $U, V$  sont des matrices  $n \times n$  orthogonales, alors  $UV$  est aussi une matrice orthogonale.
- Soit  $\vec{u}$  un vecteur unitaire de  $\mathbb{R}^n$  ( $\|\vec{u}\| = 1$ ). Montrer que la matrice  $Q = I_n - 2\vec{u}\vec{u}^T$  est orthogonale.
- Montrer que toute valeur propre réelle  $\lambda$  d'une matrice orthogonale  $Q$  vérifie  $\lambda = \pm 1$ .
- Soit  $Q$  une matrice orthogonale de taille  $n \times n$ . Soit  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$  une base orthogonale de  $\mathbb{R}^n$ . Montrer que  $\{Q\vec{u}_1, \dots, Q\vec{u}_n\}$  est aussi une base orthogonale de  $\mathbb{R}^n$ .

**Sol.:**

- Par définition, une matrice orthogonale  $Q$  de taille  $n \times n$  vérifie  $Q^T Q = I_n$  et  $Q Q^T = I_n$ . Comme  $Q = (Q^T)^T$ , on a  $Q^T (Q^T)^T = I_n$  et  $(Q^T)^T Q^T = I_n$ , ce qui montre que  $Q^T$  est aussi orthogonale.
- En utilisant  $V V^T = U U^T = I_n$ , on a  $UV (UV)^T = UV V^T U^T = U U^T = I_n$ . De même, on peut vérifier que  $(UV)^T UV = I_n$ , donc  $UV$  est une matrice orthogonale.
- On doit montrer  $Q^T Q = I_n$ .

**Méthode 1 :** En travaillant avec des indices, on a

$$\begin{aligned}
 (Q^T Q)_{ij} &= \sum_{k=1}^n q_{ki} q_{kj} = \sum_{k=1}^n (\delta_{ki} - 2u_k u_i) (\delta_{kj} - 2u_k u_j) \\
 &= \delta_{ij} + \sum_{k=1}^n (-\delta_{ki} 2u_k u_j - 2\delta_{kj} u_k u_i + 4u_i u_j u_k^2),
 \end{aligned}$$

avec  $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$ ,  $\delta_{ij} = 0$  sinon. En utilisant  $\sum_{k=1}^n u_k^2 = 1$ , on obtient  $Q^T Q = I_n$ .

**Méthode 2 :** On calcule matriciellement :  $Q^T = (I_n - 2\vec{u}\vec{u}^T)^T = I_n - 2(\vec{u}^T)^T \vec{u} = Q$ , ensuite,

$$Q^T Q = (I_n - 2\vec{u}\vec{u}^T)(I_n - 2\vec{u}\vec{u}^T) = I_n - 2\vec{u}\vec{u}^T - 2\vec{u}\vec{u}^T + 4\vec{u}(\vec{u}^T \vec{u})\vec{u}^T = I_n - 4\vec{u}\vec{u}^T + 4\vec{u}\vec{u}^T = I_n,$$

où l'on a utilisé  $\vec{u}^T \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 = 1$ .

*Remarque :* de telles matrices orthogonales s'appellent réflexions de Householder.

- d) La matrice orthogonale conserve la norme de tout vecteur  $\vec{x}$  :  $\|Q\vec{x}\|^2 = (Q\vec{x})^T(Q\vec{x}) = \vec{x}^T Q^T Q \vec{x} = \vec{x}^T \vec{x} = \|\vec{x}\|^2$ . Ensuite, si  $\vec{x} \neq \vec{0}$  est un vecteur propre associé à  $\lambda$ , on a  $\|\vec{x}\| = \|Q\vec{x}\| = \|\lambda\vec{x}\| = |\lambda| \|\vec{x}\|$ . Comme  $\|\vec{x}\| \neq 0$ , on obtient  $|\lambda| = 1$ , ainsi  $\lambda = \pm 1$ .
- e) On calcule pour tous  $i, j$  :

$$Q\vec{u}_i \cdot Q\vec{u}_j = (Q\vec{u}_i)^T Q\vec{u}_j = \vec{u}_i^T Q^T Q \vec{u}_j = \vec{u}_i^T \vec{u}_j = \vec{u}_i \cdot \vec{u}_j.$$

Comme les  $\vec{u}_i$  sont orthogonaux entre eux, ceci montre que la famille  $\{Q\vec{u}_1, \dots, Q\vec{u}_n\}$  est orthogonale et constituée de vecteurs non nuls (de normes  $\|Q\vec{u}_i\| = \|\vec{u}_i\|$ ).

Il reste à montrer que  $\{Q\vec{u}_1, \dots, Q\vec{u}_n\}$  est une base.

**Méthode 1 :** Comme  $Q$  est inversible (d'inverse  $Q^T$ ),  $Q$  transforme les bases en bases, donc  $\{Q\vec{u}_1, \dots, Q\vec{u}_n\}$  est une base.

**Méthode 2 :** Comme la famille  $\{Q\vec{u}_1, \dots, Q\vec{u}_n\}$  est orthogonale et constituée de vecteurs non nuls, elle est automatiquement linéairement indépendante. Comme elle comporte  $n$  vecteurs, c'est une base de  $\mathbb{R}^n$ .

*Remarque :* si  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$  est une base orthonormée, alors  $\|Q\vec{u}_i\| = 1$ , et  $\{Q\vec{u}_1, \dots, Q\vec{u}_n\}$  est aussi une base orthonormée.

#### Exercice 4

Appliquer la méthode de Gram-Schmidt pour orthogonaliser les bases de sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^n$  suivantes.

L'exercice ne vous demande que de calculer une base orthogonale (pas nécessairement orthonormée) et c'est aussi ce que le solutionnaire vous propose. Vous pouvez bien sûr calculer une base orthonormée (car elle est orthogonale en particulier). Ceci a l'avantage d'également révéler la factorisation QR comme vu en classe.

a)  $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$  base d'un s.e.v. de  $\mathbb{R}^3$ , avec  $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

b)  $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$  base d'un s.e.v. de  $\mathbb{R}^4$ , avec  $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

- c) Donner une base orthonormale pour a) et b).

**Sol.:**

a) La méthode de Gram-Schmidt donne  $\vec{u}_1 = \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,

$$\vec{u}_2 = \vec{w}_2 - \frac{\vec{w}_2 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}.$$

b) La méthode de Gram-Schmidt donne  $\vec{u}_1 = \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,

$$\vec{u}_2 = \vec{w}_2 - \frac{\vec{w}_2 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 0 \\ 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix},$$

$$\vec{u}_3 = \vec{w}_3 - \frac{\vec{w}_3 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 - \frac{\vec{w}_3 \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2} \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1/5 \\ 2/5 \\ -2/5 \\ -1/5 \end{pmatrix}.$$

c) Pour a) :  $\vec{u}_1 / \|\vec{u}_1\| = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{u}_2 / \|\vec{u}_2\| = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

Pour b) :  $\vec{u}_1 / \|\vec{u}_1\| = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{u}_2 / \|\vec{u}_2\| = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{u}_3 / \|\vec{u}_3\| = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

### Exercice 5

Calculer la décomposition QR des matrices suivantes.

a)  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,

b)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ ,

c)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Sol.:**

a) On applique la méthode de Gram-Schmidt aux vecteurs  $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ , puis on les normalise. On obtient  $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$  et  $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$ , d'où  $Q = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$ ,

et  $R = Q^T A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

b)  $Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ ,  $R = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 5/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{6}/3 & \sqrt{6}/3 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ .

$$c) \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 3/\sqrt{22} \\ 0 & -2/\sqrt{22} \\ -1/\sqrt{2} & 3/\sqrt{22} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{11/2} \end{pmatrix}.$$

---

Copyright © Prof(s). de la section de mathématiques EPFL (Assyr Abdulle, ...). Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre: D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications*. De Boeck, Bruxelles, 2005.