

## Série 10 (Corrigé)

Cette série fait suite aux chapitres 5.3, 5.4, 6.1 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay, aussi bien que certains concepts vus au cours.

**Remarques :** il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.

### Exercice 1

Toute matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  a un polynôme caractéristique  $p_A$  qui peut s'écrire sous forme factorisée comme suit :  $p_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$ , où  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont les  $n$  valeurs propres de  $A$  (réelles ou complexes, et pas forcément toutes différentes).

Montrez que  $\det(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$ . Avec des mots : le déterminant d'une matrice est égal au produit de ses valeurs propres (multiplicités comprises). Ceci est vrai pour toute matrice carrée (même si elle n'est pas diagonalisable). **Sol.:** On a  $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ . Dès lors,

$p_A(0) = \det(A)$ . Par ailleurs,  $p_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$  et donc  $p_A(0) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$ . Ceci conclut la démonstration que  $\det(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$ .

### Exercice 2

Soient  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Montrer

a)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ .

b)  $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$ .

c)  $(\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v})$ .

d)  $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$  et  $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$  si et seulement si  $\vec{u} = \vec{0}$ .

**Sol.:**

a) On note  $\vec{u} := \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$  et de même pour  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$ . Alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^n u_i v_i = \sum_{i=1}^n v_i u_i = \vec{v} \cdot \vec{u}$ .

b)  $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \sum_{i=1}^n (u_i + v_i) w_i = \sum_{i=1}^n u_i w_i + \sum_{i=1}^n v_i w_i = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$ .

c)  $(\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^n (\alpha u_i) v_i = \alpha \sum_{i=1}^n u_i v_i = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v}) = \sum_{i=1}^n u_i (\alpha v_i) = \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v})$ .

d)  $\vec{u} \cdot \vec{u} = \sum_{i=1}^n u_i^2 \geq 0$  et  $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$  si et seulement si  $u_i = 0$  pour tout  $i$ , c-à-d  $\vec{u} = \vec{0}$ .

### Exercice 3

a) Trouver un vecteur non nul orthogonal à  $\vec{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

b) Soient  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Calculer

$$\vec{u} \cdot \vec{v}, \quad \vec{v} \cdot \vec{w}, \quad \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\|}, \quad \frac{1}{\vec{w} \cdot \vec{w}} \vec{w}, \quad \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\|} \vec{v}.$$

c) Calculer la distance entre  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et la distance entre  $\vec{u}$  et  $\vec{w}$ .

d) Calculer les vecteurs unitaires correspondant à  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  (pointant dans la même direction que le vecteur original).

**Sol.:**

a)  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  car  $\vec{z} \cdot \vec{x} = 0$ .

b)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 7$ ,  $\vec{v} \cdot \vec{w} = 10$ ,  $\frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\|} = \frac{39}{\sqrt{5}}$ ,  $\frac{1}{\vec{w} \cdot \vec{w}} \vec{w} = \frac{1}{61} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\|} \vec{v} = \frac{39}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

c)  $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{17}$ ,  $\|\vec{u} - \vec{w}\| = 3$ .

d)  $\hat{\vec{u}} = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\hat{\vec{v}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\hat{\vec{w}} = \frac{1}{\sqrt{61}} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

### Exercice 4

Soit  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Donner l'ensemble  $W$  des vecteurs orthogonaux à  $\vec{v}$ . Est-ce un espace vectoriel? Si oui, de quelle dimension?

**Sol.:**  $W = \left\{ \vec{w} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid \vec{v} \cdot \vec{w} = 3a + 2b + c = 0 \right\}$ .

$W$  est en fait le noyau de l'application linéaire  $\vec{w} \mapsto \vec{v} \cdot \vec{w}$  de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}$ , et donc c'est un espace vectoriel. Cette application est non nulle (par exemple  $\vec{v} \cdot \vec{v} > 0$ ) donc de rang 1. Par le théorème du rang, la dimension de  $W$  est donc  $3 - 1 = 2$ , il s'agit d'un plan (appelé le plan orthogonal au vecteur  $\vec{v}$ ).

### Exercice 5

Soient  $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

- a) Vérifier que  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$  sont orthogonaux.  
 b) Calculer la projection orthogonale  $\vec{p}_W(\vec{v})$  de  $\vec{v}$  sur  $W = \text{Span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ .  
 c) Donner la décomposition  $\vec{v} = \vec{z} + \vec{p}_W(\vec{v})$ , où  $\vec{z} \in W^\perp$ .

Même question pour  $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

Même question pour  $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

**Sol.:**

- a) Un calcul direct donne  $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0$ .  
 b)

$$\vec{p}_W(\vec{v}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2} \vec{u}_2 = \frac{6}{3} \vec{u}_1 + \frac{-3}{2} \vec{u}_2 = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/2 \\ 1/2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- c)  $\vec{v} = \vec{z} + \vec{p}_W(\vec{v})$ , où  $\vec{p}_W(\vec{v})$  est calculé dans b), et  $\vec{z}$  est donné par  $\vec{z} = \vec{v} - \vec{p}_W(\vec{v}) = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Remarque : on peut vérifier que  $\vec{z} \cdot \vec{u}_1 = \vec{z} \cdot \vec{u}_2 = 0$ , c'est-à-dire  $\vec{z} \in W^\perp$ .

Même question pour  $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

- a) Les vecteurs  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$  sont orthogonaux :  $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 = \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 = 0$ .  
 b)

$$\vec{p}_W(\vec{v}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2} \vec{u}_2 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_3}{\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_3} \vec{u}_3 = \vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- c)  $\vec{z} = \vec{v} - \vec{p}_W(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Remarque :  $\vec{v} = \vec{p}_W(\vec{v})$  équivaut à  $\vec{v} \in W$ .

Même question pour  $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

a) Les vecteurs  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$  sont orthogonaux :  $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$ .

b)

$$\vec{p}_W(\vec{v}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2} \vec{u}_2 = \frac{2}{7} \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2/7 \\ 4/7 \\ 6/7 \end{pmatrix}.$$

c)  $\vec{z} = \vec{v} - \vec{p}_W(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 5/7 \\ -4/7 \\ 1/7 \end{pmatrix}$ .

### Exercice 6

Soit  $U$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  et  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p\}$  une base orthogonale de  $U$ . On considère la transformation  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  définie par  $T(\vec{v}) = \text{proj}_U(\vec{v})$ . Montrer que  $T$  est une transformation linéaire.

**Indication** : utiliser la définition de la projection orthogonale.

**Sol. : Méthode 1 :**

$$\begin{aligned} T(\alpha \vec{v} + \beta \vec{w}) &= \frac{(\alpha \vec{v} + \beta \vec{w}) \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 + \dots + \frac{(\alpha \vec{v} + \beta \vec{w}) \cdot \vec{u}_p}{\vec{u}_p \cdot \vec{u}_p} \vec{u}_p \\ &= \alpha \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 + \beta \frac{\vec{w} \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 + \dots + \alpha \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_p}{\vec{u}_p \cdot \vec{u}_p} \vec{u}_p + \beta \frac{\vec{w} \cdot \vec{u}_p}{\vec{u}_p \cdot \vec{u}_p} \vec{u}_p = \alpha \vec{T}(\vec{v}) + \beta \vec{T}(\vec{w}). \end{aligned}$$

**Méthode 2 :** En utilisant l'identité  $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{x}^T \vec{y} = \vec{y}^T \vec{x}$ , on a

$$\begin{aligned} T(\vec{v}) &= \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 + \dots + \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_p}{\vec{u}_p \cdot \vec{u}_p} \vec{u}_p = \vec{u}_1 \vec{u}_1^T (\vec{u}_1^T \vec{u}_1)^{-1} \vec{v} + \dots + \vec{u}_p \vec{u}_p^T (\vec{u}_p^T \vec{u}_p)^{-1} \vec{v} \\ &= \left( \vec{u}_1 \vec{u}_1^T (\vec{u}_1^T \vec{u}_1)^{-1} + \dots + \vec{u}_p \vec{u}_p^T (\vec{u}_p^T \vec{u}_p)^{-1} \right) \vec{v}. \end{aligned}$$

Ainsi, la transformation  $T$  est associée à la matrice de taille  $n \times n$  définie par  $\vec{u}_1 \vec{u}_1^T (\vec{u}_1^T \vec{u}_1)^{-1} + \dots + \vec{u}_p \vec{u}_p^T (\vec{u}_p^T \vec{u}_p)^{-1}$  et est donc linéaire.

### Exercice 7

Soit  $W$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_q\}$  une base orthogonale de  $W$ . Soit  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r\}$  une base orthogonale de  $W^\perp$ .

Montrer que  $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_q, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r\}$  est orthogonale et prouver la relation

$$\dim W + \dim W^\perp = n.$$

**Sol. :** Le vecteur  $\vec{w}_i$  et le vecteur  $\vec{v}_j$  sont orthogonaux pour tous  $i = 1 \dots q$ ,  $j = 1 \dots r$  car ils appartiennent aux espaces orthogonaux  $W$  et  $W^\perp$ . Les vecteurs  $\vec{w}_i$  sont orthogonaux entre eux

car ils constituent une base orthogonale, de même pour les vecteurs  $\vec{v}_j$ . Ainsi, n'importe quels deux vecteurs dans la famille  $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_q, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r\}$  sont orthogonaux : c'est une famille orthogonale.

Montrons la relation  $\dim W + \dim W^\perp = n$ .

**Méthode 1 :** La famille  $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_q, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r\}$  est orthogonale donc linéairement indépendante. De plus tout vecteur  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  se décompose sous la forme  $\vec{v} = \vec{z} + \vec{w}$  avec  $\vec{z} \in W^\perp$  et  $\vec{w} = \vec{p}_W(\vec{v}) \in W$ . Or  $\vec{z} \in W^\perp$  peut être décomposé dans la base  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r\}$  de  $W^\perp$  et  $\vec{p}_W(\vec{v}) \in W$  peut être décomposé dans la base  $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_q\}$  de  $W$ . Ainsi, tout vecteur  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  peut se décomposer selon la famille linéairement indépendante  $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_q, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r\}$  qui est donc une base de  $\mathbb{R}^n$ . Par conséquent  $q + r = n$ .

**Méthode 2 :** Appliquons le théorème du rang à l'application linéaire projection  $\vec{p}_W$  :

$$\dim \text{Im } \vec{p}_W + \dim \text{Ker } \vec{p}_W = n.$$

Or la projection vérifie  $\text{Ker } \vec{p}_W = W^\perp$  et  $\text{Im } \vec{p}_W = W$ , d'où le résultat.

### Exercice 8

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

a) Soit  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne. Alors pour un vecteur  $\vec{v}$ ,  $\|c\vec{v}\| = c\|\vec{v}\|$  quel que soit le scalaire  $c$ . □ □

b) Deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux si et seulement si

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2.$$

□ □

c) Si un vecteur  $\vec{v}$  est orthogonal à tous les vecteurs sauf un d'une base d'un sous-espace  $W$ , alors  $\vec{v}$  appartient à  $W^\perp$ . □ □

d) Soit  $W$  un sous-espace d'un espace vectoriel  $V$ . Si la dimension de l'espace  $W^\perp$  est égale à 1, alors on peut trouver une base de  $V$  formée par des vecteurs de  $W$ . □ □

**Sol.:** Faux : a), b), c), d).

En effet, pour a) on a que  $\|c\vec{v}\| = |c|\|\vec{v}\|$  donc pour  $c = -1$  on a  $\|-\vec{v}\| = \|\vec{v}\| \neq -\|\vec{v}\|$ .

Pour b) on trouve un contre-exemple : Avec  $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  on a  $\|u\| = 1 = \|v\|$ ,  $u+v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

et  $\|u+v\| = \sqrt{2}$ . Ainsi  $2 = \|u+v\|^2 \neq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = 1 + 2 + 1 = 4$ .

Pour c) prenons  $W = \text{span}\{e_1, e_2\}$  avec  $e_i$  le  $i$ -ème vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ . En prenant  $v = e_2$  on a bien que  $v \perp e_1$  mais  $v \not\perp e_2$ .

Pour d), prenons  $V = \mathbb{R}^2$  et  $W = \text{span}\{e_1\}$ . On a que  $W^\perp = \text{span}\{e_2\}$  et  $\dim W = \dim W^\perp = 1$  mais  $W$  ne peut pas contenir une base de  $\mathbb{R}^2$ .

Copyright © Prof(s). de la section de mathématiques EPFL (Assyr Abdulle, Orane Pouchon, ...). Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre: D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications*. De Boeck, Bruxelles, 2005.