Durée : 60 minutes

Algèbre linéaire
Test intermédiaire
MT
Automne 2022

Enoncé

Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

$+3$ points si la réponse est correcte,
0 point si la question n'est pas répondue
-1 point si la réponse est incorrecte.

Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

$+1$ point si la réponse est correcte,
0 point si la question n'est pas répondue
-1 point si la réponse est incorrecte.

Notation

– Pour une matrice A, a_{ij} désigne l'élément situé sur la ligne i et la colonne j de la matrice.
– Pour un vecteur $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, x_i désigne la i-ème coordonnée de $\boldsymbol{x}$.
– I_m désigne la matrice identité de taille $m \times m$.
– $\mathbb{P}_n$ désigne l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n.
– $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices de taille $m\times n$ à coefficients réels.
– Pour $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, le produit scalaire canonique est défini par $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$.

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : Soient $\mathcal{E}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{B} = \left(1+t^2, 2-t^3, t, 1-t^2\right)$ une base ordonnée de $\mathbb{P}_3$. Soit $T : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire définie par

$$T(a + bt + ct^2 + dt^3) = \begin{pmatrix} a-b \\ a-c \\ 2a+c \\ 2b+d \end{pmatrix}.$$

Soit $A = [T]_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$ la matrice de T par rapport à la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{P}_3$ et la base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^4$, telle que $\big[T(p)\big]_{\mathcal{E}} = A\big[p\big]_{\mathcal{B}}$ pour tout $p \in \mathbb{P}_3$. Alors on a

☐ $a_{34} = 1$. ☐ $a_{34} = 2$. ☐ $a_{34} = -2$. ☐ $a_{34} = -1$.

Question 2 : Soit $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4$, où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Alors

☐ T est injective et surjective.
☐ T n'est ni injective ni surjective.
☐ T est injective mais n'est pas surjective.
☐ T est surjective mais n'est pas injective.

Question 3 : Soit R la forme échelonnée réduite de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & -6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Alors on a

☐ $r_{13} = -3$. ☐ $r_{13} = -2$. ☐ $r_{13} = 0$. ☐ $r_{13} = -4$.

Question 4 : Soient

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -8 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Une solution $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ du système $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ a pour première coordonnée

☐ $x_1 = -1$. ☐ $x_1 = 4$. ☐ $x_1 = -2$. ☐ $x_1 = 5$.

Question 5 : L'inverse $B = A^{-1}$ de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -3 & 4 & 7 \\ 4 & -2 & -7 \end{pmatrix}$$

est telle que

- ☐ $b_{32} = -1$.
- ☐ $b_{32} = 2$.
- ☐ $b_{32} = -2$.
- ☐ $b_{32} = 1$.

Question 6 : Soient

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

deux bases ordonnées de $\mathbb{R}^3$. Alors la matrice de changement de base $P_{\mathcal{CB}}$ de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{C}$, telle que $[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{CB}}[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}$ pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$, est

- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$.
- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.
- ☐ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
- ☐ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Question 7 : Soit a un paramètre réel. Le système

$$\begin{cases} x + \quad ay + 3z = 0 \\ \qquad y - 2z = 3 \\ -x + \quad 4y + 4z = a \\ \qquad (a+6)y + 3z = a^2 \end{cases}$$

- ☐ admet au moins une solution si et seulement si $a \in \{-2, 3\}$.
- ☐ n'admet pas de solution si et seulement si $a \in \{-2, 3\}$.
- ☐ admet une infinité de solutions si et seulement si $a = -2$.
- ☐ admet une unique solution si et seulement si $a = 3$.

Question 8 : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Alors on a

- ☐ $\det(A) = 48$.
- ☐ $\det(A) = -24$.
- ☐ $\det(A) = 6$.
- ☐ $\det(A) = 0$.

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire, si elle est parfois fausse).

Question 9 : Si A et B sont deux matrices inversibles de taille $n \times n$, alors AB est inversible et

$$(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}\,.$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 10 : Soit V un espace vectoriel tel que $\dim V = n$. Si S est un ensemble de vecteurs linéairement indépendants de V, alors S est une base de V.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 11 : Les polynômes

$$p_1(t) = t^2\,, \quad p_2(t) = t^2 + t^3\,, \quad p_3(t) = t - t^3\,, \quad p_4(t) = 1 + t^3$$

forment une base de $\mathbb{P}_3$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 12 : L'ensemble $\big\{p \in \mathbb{P}_4 \mid p(t) = at^4 \text{ pour un certain } a \in \mathbb{R}\big\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{P}_4$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 13 : Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sachant que R est la forme échelonnée réduite de la matrice A, alors les vecteurs

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

forment une base de $\mathrm{Ker}(A)$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 14 : Soit A une matrice de taille 9×5. Si $\dim\big(\mathrm{Ker}(A)\big) = 5$, alors $\dim\big(\mathrm{Im}(A)\big) = 0$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 15 : Si A est une matrice de taille $n \times n$, alors $\det(A^T) = -\det(A)$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 16 : Si $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ est une famille de vecteurs linéairement indépendants d'un espace vectoriel V et si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sont des nombres réels arbitraires, alors $\{\alpha_1\boldsymbol{v}_1, \alpha_2\boldsymbol{v}_2, \ldots, \alpha_k\boldsymbol{v}_k\}$ est aussi une famille de vecteurs linéairement indépendants de V.

☐ VRAI ☐ FAUX