Exercices — Série 8

Mots-clés: bases, dimension d'un (sous)-espace vectoriel, rang, théorème du rang, changement de base, matrice d'une transformation linéaire dans des bases.

Question 1 Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 9 & -7 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 5 & -6 & 10 & 7 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que les matrices A et B sont équivalentes (selon les lignes).

b) Calculer $\mathrm{rg}(A)$ et $\dim \mathrm{Ker} A$.

c) Trouver une base pour chacun des sous-espaces $\mathrm{Im} A$, $\mathrm{Ker} A$ et $\mathrm{Ker} A^T$, ainsi que du sous-espace $\mathrm{Lgn}(A)$ engendré par les lignes de A.

Solution:

a) On constate que la forme échelonnée réduite des deux matrices est la même, elles sont donc équivalentes.

b) En analysant la matrice B on remarque alors que :

Il y a deux colonnes indépendantes ce qui donne $\mathrm{rg}(A) = 2$ (le rang est le nombre de colonnes-pivot) et une base de $\mathrm{Im}(A)$ peut être formée par les deux premières colonnes de A qui correspondent aux colonnes-pivot de sa forme échelonnée. Par le Théorème du rang on trouve $\dim \mathrm{Ker}(A) = 4 - \mathrm{rg}(A) = 2$.

Trouvons les bases.

c) Base de $\mathrm{Ker}(A)$: L'équation $A\vec{x} = 0$ est équivalente à $B\vec{x} = 0$; une base de $\mathrm{Ker}(A)$ est donnée par : $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et donc $\dim \mathrm{Ker}(A) = 2$, ce qui confirme le calcul effectué ci-dessus.

Base de Lgn(A): Une base du sous-espace engendré par les lignes de A est donnée par les lignes non nulles de la forme échelonnée B:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} \right)$$

Base de $\mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{Ker}(A^T)$: On a vu plus haut que les deux premières colonnes de A forment une base de $\mathrm{Im}(A)$. Enfin $\mathrm{Im}(A)$ coïncide avec le sous-espace engendré par les lignes de A^T. Puisqu'il est de dimension 2, le Théorème du rang nous apprend que le noyau de A^T est de dimension $3-2=1$. On trouve que $\mathrm{Ker}(A^T)$ est engendré par $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Question 2 Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \\ -4 & 12 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$. Alors $\mathrm{Im}(A)$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ de dimension 1.

■ VRAI ☐ FAUX

Solution: La matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \\ -4 & 12 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$ donne une application linéaire $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$. Ainsi $\mathrm{Im}(A)$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$, pas de $\mathbb{R}^2$. Pour trouver sa dimension, il faut analyser les colonnes de A. On constate qu'elles sont proportionnelles et donc que la dimension de $\mathrm{Im}(A)$ est 1.

Question 3 Soit V un espace vectoriel et $v_1, \dots, v_k \in V$. Alors

- ☐ Si la famille $\{v_1, \dots, v_k\}$ engendre l'espace vectoriel V, alors $\dim V \geq k$.
- ☐ Si la famille $\{v_1, \dots, v_k\}$ engendre l'espace vectoriel V, alors $\dim V = k$.
- ■ Si la famille $\{v_1, \dots, v_k\}$ est libre, alors $\dim V \geq k$.
- ☐ Si la famille $\{v_1, \dots, v_k\}$ est libre, alors $\dim V = k$.

Solution: La réponse est: Si la famille $\{v_1, \dots, v_k\}$ est libre, alors $\dim V \geq k$. En effet, si la famille $\{v_1, \dots, v_k\}$ est libre, on peut *compléter* cette famille en une base et cette base aura donc au moins k éléments. Autrement dit, la dimension de V est k au minimum ($\dim V \geq k$). Alors que, si la famille $\{v_1, \dots, v_k\}$ engendre V, on peut *extraire* une base de cette famille et cette base aura donc au plus k éléments. Autrement dit, la dimension de V est k au maximum ($\dim V \leq k$).

Question 4 Il existe une matrice A de taille 3×7 telle que:

- ☐ $\dim \mathrm{Ker}(A) = 4$ et $\mathrm{rg}(A) \leq 2$
- ■ $\dim \mathrm{Ker}(A) = 5$ et $\mathrm{rg}(A) = 2$
- ☐ $\dim \mathrm{Ker}(A) = 2$ et $\mathrm{rg}(A) \leq 4$
- ☐ $\dim \mathrm{Ker}(A) = 3$ et $\mathrm{rg}(A) = 4$

Solution: La matrice A représente une application linéaire $\mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^3$. Par conséquent, l'image de A est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$, c'est donc un sous-espace de dimension ≤ 3. Le Théorème du rang affirme que

$$\dim \mathrm{Ker}(A) = 7 - \mathrm{rg}(A) \geq 7 - 3 = 4$$

ce qui élimine deux affirmations (celles qui disent que $\dim \mathrm{Ker}(A) \leq 3$). Intuitivement c'est clair: il faut "éliminer" au moins un sous-espace de dimension 4 pour envoyer un espace de dimension 7 dans $\mathbb{R}^3$. Enfin le Théorème du rang s'écrit aussi $\dim \mathrm{Ker}(A) + \mathrm{rg}(A) = 7$, ce qui élimine aussi l'affirmation $\dim \mathrm{Ker}(A) = 4$ et $\mathrm{rg}(A) \leq 2$ car, dans ce cas, la somme ne peut pas être égale à 7.

Question 5 Soit A la matrice de la projection orthogonale $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sur le plan horizontal $\mathrm{Vect}\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$. Alors $\dim \mathrm{Ker}(A) = 1$ et $\mathrm{rg}(A) = 2$.

■ VRAI ☐ FAUX

Solution: On a $\dim \mathrm{Ker} A = 1$, puisque le noyau est la droite $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_3})$ et $\dim \mathrm{Im} A = \mathrm{rg}(A) = 2$ puisque l'image de A est le plan Oxy, un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2.

Question 6 Soit A une matrice inversible de taille 5×5. Laquelle des affirmations suivantes est vraie?

- ☐ $\mathrm{Ker}(A)$ est vide
- ■ Les lignes de A sont linéairement indépendantes
- ☐ Le rang de A est strictement plus petit que 5
- ☐ Les colonnes de A n'engendrent pas $\mathbb{R}^5$

Solution: La forme échelonnée d'une matrice inversible a un pivot dans chaque ligne et chaque colonne. Ainsi les colonnes, et les lignes également, forment une base de $\mathbb{R}^5$. Donc en particulier elles engendrent $\mathbb{R}^5$ et elles sont linéairement indépendantes. L'application linéaire que représente A est bijective, et donc le noyau est *nul* (pas vide!), et l'image de A est $\mathbb{R}^5$ tout entier, donc le rang de A vaut 5.

Question 7 Soit $T\colon \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}$ définie par $T(p) = p(-1) + p(0) + p(1)$. Alors

- ☐ $\dim \operatorname{Ker}(T) = 1$ et $\operatorname{rg}(T) = 2$
- ☐ $\dim \operatorname{Ker}(T) = 1$ et $\operatorname{rg}(T) = 1$
- ☐ T n'est pas linéaire
- ■ $\dim \operatorname{Ker}(T) = 2$ et $\operatorname{rg}(T) = 1$

Solution: L'application T est linéaire et, plus explicitement, on a $T(a+bt+ct^2) = 3a + 2c$. En particulier, T n'est pas l'application nulle et donc la dimension de l'image de T est 1. Par le théorème du rang, celle du noyau est 2.

Question 8 Soit $T\colon \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}$ définie par $T(p) = p(-1) + p(0) + p(1)$. Une base du noyau de T est donnée par $\{-2 + t + 3t^2, 2 - 3t^2\}$.

■ VRAI ☐ FAUX

Solution: Par la question précédente, la dimension du noyau vaut 2. Il faut donc 2 polynômes linéairement indépendants pour engendrer le noyau. On remarque que $-2 + t + 3t^2$ et $2 - 3t^2$ sont des polynômes linéairement indépendants qui appartiennent au noyau de T. Ils forment donc une base du noyau.

Question 9
Soient $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ et $\mathcal{C} = (c_1, c_2)$ deux bases d'un espace vectoriel V. Supposons que $b_1 = 6c_1 - 2c_2$ et $b_2 = 9c_1 - 4c_2$.

(a) Calculer la matrice de changement de base $P_{\mathcal{CB}}$ de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$.

(b) Trouver $[x]_{\mathcal{C}}$ pour $x = -3b_1 + 2b_2$ en utilisant le résultat en (a).

Soient $\mathcal{A} = (\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2})$ et $\mathcal{D} = (\overrightarrow{d_1}, \overrightarrow{d_2})$ les bases de $\mathbb{R}^2$ définies par:

$$\overrightarrow{a_1} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{a_2} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{d_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{d_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(c) Calculer la matrice de changement de base $P_{\mathcal{DA}}$ de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{D}$.

(d) Calculer la matrice de changement de base $P_{\mathcal{AD}}$ de $\mathcal{D}$ vers $\mathcal{A}$.

Solution:

(a) La matrice de changement de base de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$ est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de base de la base $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{C}$, donc $P_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$.

(b) L'équation $x = -3b_1 + 2b_2$ signifie que $[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Pour trouver $[x]_{\mathcal{C}}$ il suffit d'utiliser la matrice de changement de base :

$$[x]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C}\mathcal{B}}[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(c) Pour trouver la matrice de changement de base de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{D}$ il faut écrire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{a_1}$ et $\overrightarrow{a_2}$ dans la base $\mathcal{D}$, c'est à dire trouver les nombres réels x_1 et x_2 tels que $\overrightarrow{a_1} = x_1\overrightarrow{d_1} + x_2\overrightarrow{d_2}$ et les nombres réels y_1 et y_2 tels que $\overrightarrow{a_2} = y_1\overrightarrow{d_1} + y_2\overrightarrow{d_2}$. Il suffit pour cela de résoudre les deux systèmes :

$$(\overrightarrow{d_1}\ \overrightarrow{d_2}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{a_1} \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{d_1}\ \overrightarrow{d_2}) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{a_2}$$

On peut par exemple les résoudre simultanément comme vu en cours. On trouve $x_1 = -3$, $x_2 = -5$, $y_1 = 1$, $y_2 = 2$ ce qui donne :

$$P_{\mathcal{D}\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

(d) Pour trouver $P_{\mathcal{A}\mathcal{D}}$ il suffit d'inverser $P_{\mathcal{D}\mathcal{A}}$. On trouve

$$P_{\mathcal{A}\mathcal{D}} = P_{\mathcal{D}\mathcal{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Question 10

Soit $T\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la transformation linéaire définie par $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 3y \\ x - y \end{pmatrix}$.

a) Donner la matrice $A = [T]_{\mathcal{E}\mathcal{E}}$ de T par rapport aux bases canoniques $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

b) Donner la matrice $B = [T]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$ de T par rapport aux bases

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ de } \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ de } \mathbb{R}^3.$$

Solution:

a) La matrice de l'application linéaire T par rapport aux bases canoniques est

$$A = (T(\vec{e_1}) \quad T(\vec{e_2})) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Pour calculer la matrice B, on commence par calculer les images par T des vecteurs de la base $\mathcal{B} = (\vec{b_1}, \vec{b_2})$:

$$T(\vec{b_1}) = T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T(\vec{b_2}) = T\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ensuite, on calcule les coordonnées de ces deux vecteurs dans la base $\mathcal{C}$ en résolvant les systèmes suivants:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \end{array}\right)$$

et

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right).$$

Ainsi

$$B = [T]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 4 \\ -10 & -4 \end{pmatrix}.$$

Question 11

Soit $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire donnée par $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x_1 + x_3 \\ 2x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$.

Soient $\mathcal{E}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B} = (\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3})$ la base de $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

a) Donner la matrice $[T]_{\mathcal{BE}}$ qui représente T par rapport aux bases $\mathcal{E}$ (de départ) et $\mathcal{B}$ (d'arrivée).

b) Même question pour $[T]_{\mathcal{EB}}$, dans les bases $\mathcal{B}$ (de départ) et $\mathcal{E}$ (d'arrivée).

c) Même question pour $[T]_{\mathcal{BB}}$, les bases $\mathcal{B}$ (de départ) et $\mathcal{B}$ (d'arrivée).

Solution:

a) On commence par prendre les vecteurs de la base de départ $\mathcal{E}$ et à leur appliquer la transformation T. On obtient

$$T(\vec{e_1}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T(\vec{e_2}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T(\vec{e_3}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

qui sont encore exprimés dans la base canonique $\mathcal{E}$. Il faut maintenant calculer la matrice de passage de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{B}$, notée $P_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$ (telle que $[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\mathcal{E}}[\vec{x}]_{\mathcal{E}}$). On sait, du cours, que $P_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$ est l'inverse de la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{E}$, notée $P_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$. Cette dernière est donnée par

$$P_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

(ses colonnes sont les vecteurs de la base $\mathcal{B}$, exprimés dans la base $\mathcal{E}$). On obtient que l'inverse est $P_{\mathcal{E}\mathcal{B}}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = P_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$. On applique alors $P_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$ aux vecteurs $T(\vec{e_i})$ (qui sont exprimés dans la base $\mathcal{E}$) et on trouve la matrice $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} P_{\mathcal{B}\mathcal{E}}T(\vec{e_1}) & P_{\mathcal{B}\mathcal{E}}T(\vec{e_2}) & P_{\mathcal{B}\mathcal{E}}T(\vec{e_3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) On commence par prendre les vecteurs de la base de départ $\mathcal{B}$ et à leur appliquer la transformation T.

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ces vecteurs sont exprimés dans la base canonique $\mathcal{E}$. La matrice $[T]_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$ est

$$[T]_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) On applique $P_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$ aux vecteurs obtenus au point précédent et on obtient la matrice

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} P_{\mathcal{B}\mathcal{E}}T(\vec{b_1}) & P_{\mathcal{B}\mathcal{E}}T(\vec{b_2}) & P_{\mathcal{B}\mathcal{E}}T(\vec{b_3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$