Série 2

Mots-clés: Espaces $\mathbb{R}^n$, équations vectorielles, combinaisons linéaires, partie engendrée par des vecteurs, équations matricielles, espace des colonnes, multiplication matrice-vecteur, systèmes (in)homogènes.

Question 1 Soient les vecteurs $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -13 \\ -3 \end{pmatrix}$, et $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$.

i) Est-il possible d'écrire $\vec{b}$ comme combinaison linéaire de $\vec{a_1}$ et $\vec{a_2}$?

ii) Donner une interprétation géométrique du résultat.

Solution:

i) Non. Considérons l'équation linéaire $x_1\vec{a_1} + x_2\vec{a_2} = \vec{b}$, d'inconnues x_1, x_2. Le système linéaire correspondant est

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 &= -3 \\ -2x_1 - 13x_2 &= 8 \\ 3x_1 - 3x_2 &= 1 \end{cases}$$

avec pour matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 5 & -3 \\ -2 & -13 & 8 \\ 3 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

et pour forme échelonnée réduite

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Comme il y a un pivot dans la colonne correspondant au vecteur $\vec{b}$, on a que ce système ne possède pas de solution.

ii) Cela signifie que le vecteur $\vec{b}$ n'appartient pas au plan formé des vecteurs $x_1\vec{a_1} + x_2\vec{a_2}$, avec x_1 et x_2 réels.

Question 2

Prenons les vecteurs $\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{a_2} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$, et $\vec{b} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$. Pour quelle(s) valeur(s) de $\alpha \in \mathbb{R}$ le vecteur $\vec{b}$ est-il combinaison linéaire de $\vec{a_1}$ et $\vec{a_2}$?

- ☐ $\alpha = -\frac{5}{2}$
- ■ $\alpha = -\frac{7}{2}$
- ☐ $\alpha = -\frac{3}{2}$ et $\alpha = -\frac{7}{2}$
- ☐ $\alpha = -\frac{3}{2}$ et $\alpha = -\frac{5}{2}$

Solution: Considérons le système linéaire $x_1\vec{a_1} + x_2\vec{a_2} = \vec{b}$. En coordonnées, on obtient le système

$$\begin{cases} x_1 & -3x_2 & = & \alpha \\ & x_2 & = & -5 \\ -2x_1 & +8x_2 & = & -3 \end{cases}$$

avec la matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & -3 & \alpha \\ 0 & 1 & -5 \\ -2 & 8 & -3 \end{array}\right).$$

Après des opérations élémentaires sur les lignes, on obtient:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -15+\alpha \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 7+2\alpha \end{array}\right).$$

On voit que le système est compatible si et seulement si $7+2\alpha = 0$, i.e. $\alpha = -\frac{7}{2}$. Dans ce cas, la matrice ci-dessus est la forme échelonnée réduite.
(Remarque: Lorsque $7+2\alpha \neq 0$, le système est incompatible, et la forme échelonnée réduite est $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$.) En résumé, le vecteur $\vec{b}$ est une combinaison linéaire de $\vec{a_1}$ et $\vec{a_2}$ si et seulement si $\alpha = -\frac{7}{2}$.

Question 3
Considérons le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & - & 5x_3 & = & 4 \\ x_1 & + & 4x_2 & - & 8x_3 & = & 7 \\ -3x_1 & - & 7x_2 & + & 9x_3 & = & -6 \end{array}\right.$$

i) Écrire le système sous forme matricielle $A\vec{x} = \vec{b}$.

ii) Écrire le système comme combinaison linéaire des colonnes de la matrice A.

iii) Trouver la solution de l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$.

iv) Écrire l'ensemble des solutions en fonction d'un paramètre.

Solution:

i) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 1 & 4 & -8 \\ -3 & -7 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}$

ii) $x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -5 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}$

iii) La matrice augmentée est $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -5 & 4 \\ 1 & 4 & -8 & 7 \\ -3 & -7 & 9 & -6 \end{array}\right)$, et sa forme échelonnée réduite est $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. La variable x_3 est libre, on peut donc écrire l'ensemble des solutions comme

$$\left\{\begin{array}{ll} x_1 & = -5 - 4x_3 \\ x_2 & = 3 + 3x_3 \\ x_3 & \text{libre} \end{array}\right.$$

iv) En posant $x_3 = t \in \mathbb{R}$, on en déduit que les solutions (s_1, s_2, s_3) sont données par

$$s_3 = t,\ t \in \mathbb{R},\ s_1 = -5 - 4t,\ s_2 = 3 + 3t.$$

On en déduit l'ensemble des solutions:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Question 4

a) Soient les vecteurs $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ h \end{pmatrix}$.

i) Pour quelle(s) valeur(s) de h le vecteur $\overrightarrow{w}$ peut-il être obtenu comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$?

ii) Dans ce cas quels sont les coefficients a_1, a_2 des vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$?

b) Le vecteur $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$, se trouve-t-il dans le plan de $\mathbb{R}^3$ engendré par les colonnes de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}$? Justifiez votre réponse.

Solution:

a) Tout élément de l'espace engendré par $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ est de la forme

$$a_1\overrightarrow{v_1} + a_2\overrightarrow{v_2} = a_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

où a_1 et a_2 sont des reéls. Le vecteur $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ h \end{pmatrix}$ est engendré par $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ si et seulement il existe des réels, a_1 et a_2 tels que l'équation vectorielle suivante soit satisfaite:

$$a_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ h \end{pmatrix}$$

Sous forme matricielle on effectue des opérations en essayant de ne pas traîner des fractions:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 10 \\ 2 & 3 & h \end{array}\right) \sim_{L_1 \leftrightarrow \frac{L_2}{2}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & h \end{array}\right) \sim^{L_2 - 2L_1}_{L_3 - L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 2 & h-5 \end{array}\right) \sim_{L_3 - 2L_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & h+9 \end{array}\right) \sim_{\frac{L_1 - L_2}{2}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & h+9 \end{array}\right)$$

D'où $h = -9$ pour que le système soit compatible et $a_1 = 6$, $a_2 = -7$.

b) Pour voir si le vecteur $\vec{v}$ est dans le plan engendré par les colonnes de A, on construit une nouvelle matrice $B = (A\,|\,\vec{v})$ que l'on échelonne et on réduit. Après calculs, la forme échelonnée réduite de B montre que $\vec{v} = -5\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix}$ et donc $\vec{v}$ est bien dans ce plan.

Question 5 Soit $V = \text{Vect}\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_4}\}$ avec

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Laquelle des informations suivantes est correcte?

- ■ V contient une infinité de vecteurs de $\mathbb{R}^4$.
- ☐ Le vecteur $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in V$.
- ☐ $V = \varnothing$.
- ☐ $V = \mathbb{R}^4$.

Solution: Comme la troisième composante des quatre vecteurs est nulle, tous les vecteurs de la forme $\begin{pmatrix} * \\ * \\ a \\ * \end{pmatrix}$ avec $a \neq 0$, ne seront pas dans V. Donc V ne peut pas contenir le vecteur $\overrightarrow{b}$ ainsi que tous les vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Comme $\overrightarrow{v_1}$ (ou $\overrightarrow{v_2}$, ...) est dans V, il contient un vecteur de $\mathbb{R}^4$. Vu qu'il contient au moins un vecteur de $\mathbb{R}^4$, il contient toutes les combinaisons linéaires de celui-ci, et donc une infinité de vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

Question 6

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

1) Le système d'équations linéaires homogène représenté par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ est compatible.

   ■ Vrai　　□ Faux

2) Le système d'équations linéaires inhomogène représenté par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ est compatible.

   ■ Faux　　□ Vrai

3) Si la matrice des coefficients d'un système de quatre équations à quatre inconnues a un pivot dans chaque colonne, alors le système est compatible.

   ■ Vrai　　□ Faux

4) Si la matrice augmentée d'un système de quatre équations à quatre inconnues a un pivot dans chaque ligne, alors le système est compatible.

   ■ Faux　　□ Vrai

5) Si $\vec{x}$ est une solution non nulle de $A\vec{x} = \vec{0}$, alors aucune composante de $\vec{x}$ est nulle.

   ■ Faux　　□ Vrai

6) Si A est une matrice $m \times n$ et $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ sont tels que $A\vec{v} = \vec{0} = A\vec{w}$, alors $A(\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) = \vec{0}$ pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

   □ Faux　　■ Vrai

7) Soit A une matrice $m \times n$ et $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$. Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ l'ensemble des solutions du système $A\vec{x} = \vec{b}$. Alors le système est homogène si et seulement si $\vec{0} \in S$.

   ■ Vrai　　□ Faux

Solution:

1) Vrai. Un système d'équations linéaires homogène est toujours compatible! La matrice a beau avoir un pivot dans la dernière colonne, il ne s'agit pas ici d'un pivot dans la colonne des termes inhomogènes. Ceux-ci sont tous nuls et on ne les écrit pas.

2) Faux. La ligne $(0\ 0\ 0\ 7)$ montre que le système d'équations linéaires inhomogène est incompatible.

3) C'est vrai. Un pivot dans chacune des quatre colonnes implique l'existence d'un pivot dans chaque ligne. On conclut alors par un résultat du cours (Théorème 4).

4) C'est faux. Si par exemple le pivot de la 4ème ligne se trouve dans la 5ème colonne, alors la dernière ligne d'une forme échelonnée de la matrice augmentée est $(0\ 0\ 0\ 0\ a)$ avec $a \neq 0$ et donc le système est incompatible dans ce cas.

5) Faux. Prenons par exemple la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors $\vec{x}$ est une solution non triviale de $A\vec{x} = \vec{0}$, mais $\vec{x}$ a une composante nulle.

6) Vrai. En effet, si $A\vec{v} = \vec{0} = A\vec{w}$, alors, par les propriétés vues en cours, on a $A(\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) = A(\lambda\vec{v}) + A(\mu\vec{w}) = \lambda A\vec{v} + \mu A\vec{w} = \lambda\vec{0} + \mu\vec{0} = \vec{0}$ pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

7) Vrai. En effet, si le système est homogène on a que $\vec{b} = \vec{0} \in \mathbb{R}^m$ et clairement $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$ est solution du système. Réciproquement, supposons que $\vec{0} \in S$, alors $A\vec{0} = \vec{b}$ et donc $\vec{b} = \vec{0} \in \mathbb{R}^m$.

Question 7 Soit $V = \mathrm{Vect}\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4}\}$ avec

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Laquelle des informations suivantes est correcte?

- ☐ V contient seulement v_1, v_2, v_3, v_4.
- ☐ Le vecteur $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ n'appartient pas à V.
- ■ V contient tous les vecteurs de $\mathbb{R}^4$.
- ☐ Le vecteur nul n'appartient pas à V.

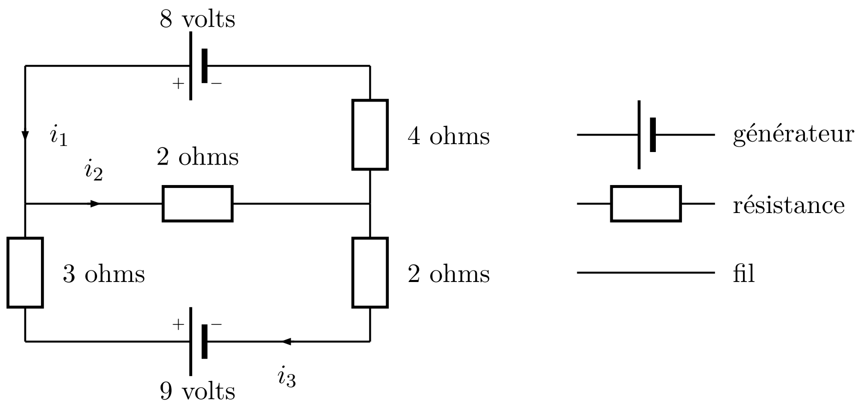
Solution: La matrice dont les colonnes sont les v_i est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Elle est déjà échelonnée (mais pas réduite) et on observe 1 pivot par variable. Donc le système $A\vec{x} = \vec{b}$ possède toujours une solution (unique ici) et donc $V = \mathbb{R}^4$.

Question 8 Les deux lois de Kirchhoff

1. À chaque nœud (embranchement) d'un circuit électrique, la somme des courants (intensités) qui entrent dans le nœud est égale à la somme des courants qui en sortent.

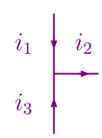
2. La somme des tensions (différences de potentiels) le long de tout circuit fermé est nulle (l'augmentation du potentiel est comptée avec $+$ et la diminution avec $-$).

On rappelle que la chute de potentiel U dans une résistance R traversée par un courant d'intensité I est donnée par la loi d'Ohm $U = RI$.
Déterminer les intensités i_1, i_2, i_3 dans le circuit suivant.



Solution: Appliquons la 1ère loi de Kirchhoff au nœud situé au dessus de la résistance de 3 ohms.

$$i_1 + i_3 = i_2.$$



Appliquons la seconde loi de Kirchhoff à la boucle du haut (sens anti-horaire, en partant du générateur) :

$$8 - 2i_2 - 4i_1 = 0.$$

De même avec la boucle du bas (maintenant dans le sens horaire) :

$$9 - 3i_3 - 2i_2 - 2i_3 = 0.$$

La matrice augmentée du système et sa forme échelonnée réduite sont :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & -8 \\ 0 & -2 & -5 & -9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

d'où la solution: $i_1 = 1, \qquad i_2 = 2, \qquad i_3 = 1.$

Question 9

Les équations en chimie traduisent les quantités de substances absorbées et produites au cours d'une réaction chimique. Lors de la combustion du méthane CH_4 par exemple, le méthane CH_4 réagit avec l'oxygène O_2 pour former du dioxyde de carbone CO_2 et de l'eau H_2O selon

$$\alpha_1 CH_4 + \alpha_2 O_2 \longrightarrow \alpha_3 CO_2 + \alpha_4 H_2O. \qquad (*)$$

"Pondérer" cette équation signifie trouver des nombres entiers strictement positifs α_1, α_2, α_3, α_4 tels que le nombre total d'atomes de carbone (C), d'hydrogène (H) et d'oxygène (O) du membre de gauche et de droite soit égal (conservation de la matière).
Question: Pondérer l'équation $(*)$.
Note: Les chimistes préfèrent les plus petits entiers $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$ qui "réalisent" la pondération.
Pour cela, considérer pour chaque molécule de la réaction le vecteur

$$\begin{pmatrix} \text{nombre d'atomes de carbone} \\ \text{nombre d'atomes d'hydrogène} \\ \text{nombre d'atomes d'oxygène} \end{pmatrix}$$

et écrire le système linéaire associé sous la forme

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = \alpha_3 \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix},$$

puis résoudre le système.

Solution: On a

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On peut réécrire ce système linéaire sous la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La forme échelonnée réduite de la matrice augmentée est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les variables de base sont $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tandis que α_4 est une variable libre. La solution générale est $\alpha_1 = \alpha_4/2$, $\alpha_2 = \alpha_4$, $\alpha_3 = \alpha_4/2$ (infinité de solutions). On donne la solution entière la plus petite: $\boxed{\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 1, \alpha_4 = 2}$.