

# Polycopié pour MATH-111(c) Algèbre linéaire

Orane Pouchon

Merci à Charles Dupille et Jakob Gander

pour leur aide dans la rédaction

Automne 2025

## Table des matières

<b>Chapitre 0 : Quelques rappels et notions importantes</b>	<b>1</b>
0.1 Ensembles de nombres et notations . . . . .	1
<b>Chapitre 1 : Systèmes d'équations linéaires</b>	<b>4</b>
1.1 Introduction et définition . . . . .	4
1.2 Nombre de solutions d'un système linéaire . . . . .	5
1.3 Méthode de résolution : opérations élémentaires . . . . .	6
1.4 Équations vectorielles . . . . .	14
1.5 Équation matricielle . . . . .	22
1.6 Ensembles de solutions d'une équation matricielle . . . . .	26
1.7 Indépendance linéaire . . . . .	30
1.8 Introduction aux applications linéaires . . . . .	35
1.9 Matrice associée à une transformation linéaire . . . . .	40
<b>Chapitre 2 : Calcul Matriciel</b>	<b>47</b>
2.1 Opérations matricielles . . . . .	47
2.2 Inverse d'une matrice . . . . .	53
2.3 Matrices par blocs . . . . .	60
<b>Chapitre 3 : Le déterminant</b>	<b>65</b>
3.1 Introduction . . . . .	65
3.2 Propriétés des déterminants . . . . .	68
3.3 Interprétation géométrique du déterminant . . . . .	71
<b>Chapitre 4 : Espaces vectoriel</b>	<b>72</b>
4.1 Sous-espace vectoriel . . . . .	74
4.2 Noyau, image et applications linéaires . . . . .	77
4.3 Bases d'espaces vectoriels . . . . .	80
4.4 Systèmes de coordonnées . . . . .	85
4.5 Dimension d'un espace vectoriel . . . . .	96
4.6 Matrices d'application et changement de bases . . . . .	100

<b>Chapitre 5 : Vecteurs propres et valeurs propres</b>	<b>104</b>
5.1 Matrices semblables . . . . .	110
5.2 Diagonalisation . . . . .	112
5.3 Applications linéaires et valeurs propres . . . . .	116
<b>Chapitre 6 : Orthogonalité et moindres carrés</b>	<b>120</b>
6.1 Produit scalaire et orthogonalité . . . . .	120
6.2 Orthogonalité dans $\mathbb{R}^n$ . . . . .	124
6.3 Familles orthogonales et projections orthogonales . . . . .	128
6.4 Gram-Schmidt . . . . .	138
6.5 Factorisation QR . . . . .	141
6.6 Méthode des moindres carrés . . . . .	144
6.7 Droite de régression ou droite des moindres carrés . . . . .	148
<b>Chapitre 7 : matrices symétriques</b>	<b>151</b>
7.1 Diagonalisation des matrices symétriques . . . . .	151
7.2 Le théorème spectral . . . . .	155
7.3 Décomposition spectrale . . . . .	158
7.4 Décompositions en valeurs singulières . . . . .	159

# Chapitre 0 : Quelques rappels et notions importantes

**Objectifs.** Le but de ce chapitre 0 est de fournir un rappel sur des notions de la scolarité obligatoire.

## 0.1 Ensembles de nombres et notations

Nombres naturels (entiers positifs)	$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$
Nombres entiers relatifs	$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
Nombres rationnels (fractions)	$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* \right\}$
Nombres réels	$\mathbb{R}$
Nombres complexes	$\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}, i^2 = -1$

Quelques notations :

$\in$	appartient à	$2 \in \mathbb{N}, \pi \in \mathbb{R}$
$\notin$	n'appartient pas à	$-2 \notin \mathbb{N}, \pi \notin \mathbb{Q}$
$\subset$	est inclu dans	$\{2\} \subset \mathbb{N}, \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
$\exists$	il existe	$\exists x \in \mathbb{R}$ tel que ...
$\forall$	pour tout	$\forall x \in \mathbb{R}$ on a ...

On rappelle que

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$
$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

*Remarque:* On a  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ .

**Définition 0.1** (ensemble).

Un ensemble est formé d'éléments. On le note, par exemple,  $E = \{a, b, c, \dots\}$ .

Pour dire qu'un élément  $x$  appartient à  $E$ , on utilise  $x \in E$ .

Pour dire qu'un sous-ensemble  $A$  est inclu dans  $E$  (est un sous-ensemble de  $E$ ), on utilise  $A \subset E$ .

**Définition 0.2** (union et intersection).

Soient  $E$  un ensemble et  $A$  et  $B$  sous-ensembles de  $E$  ( $A \subset E$  et  $B \subset E$ ). On définit

1. l'intersection  $A \cap B$  par

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

2. l'union  $A \cup B$  par

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

## Équations à une inconnue dans $\mathbb{R}$

Exemple :

$$x^2 - 1 = x + 1$$

est une **équation** dans  $\mathbb{R}$ , formée du membre de gauche  $g(x) = x^2 - 1$  et du membre de droite  $d(x) = x + 1$ .

$x$  est l'**inconnue** (ou *variable*).

On appelle **solution** de  $g(x) = d(x)$  dans  $\mathbb{R}$  tout nombre réel qui, substitué à  $x$ , fait de l'équation une égalité vraie.

Dans l'exemple, 2 est solution de l'équation, mais 1 n'est pas solution de l'équation.

L'ensemble de toutes les solutions de l'équation se note généralement  $S$ . Ici, on a

$$S = \{-1; 2\}.$$

Résoudre une équation consiste à déterminer l'ensemble des solutions  $S$ .

## Méthode de résolution algébrique

On effectue des opérations algébriques pour remplacer l'équation par une **équation équivalente** (qui a les mêmes solutions) de forme plus simple :

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= x + 1 \\ \iff x^2 - x - 2 &= 0 \\ \iff (x - 2)(x + 1) &= 0 \end{aligned}$$

d'où  $S = \{-1; 2\}$ .

*Attention* : Les opérations successives suivantes

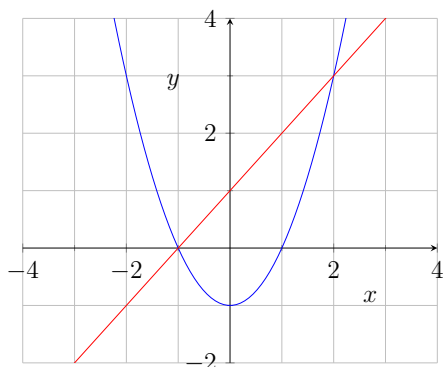
$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= x + 1 \\ (x - 1)(x + 1) &= x + 1 \\ x - 1 &= 1 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

ne donnent pas lieu à des équations équivalentes ! Que se passe-t-il avec  $x = -1$  ?

## Méthode de résolution graphique

On représente dans un même système d'axes le graphe des fonctions associées au membre de gauche  $g(x)$  et au membre de droite  $d(x)$  et on détermine leurs points d'intersection.

Dans le cas de notre exemple, le graphe de  $g(x) = x^2 - 1$  (fonction quadratique) est une parabole de sommet  $(0; -1)$  et celui de  $d(x) = x + 1$  (fonction affine) une droite de pente 1 et d'ordonnée à l'origine égale à 1. Les deux graphes s'intersectent aux points  $(-1; 0)$  et  $(2; 3)$ , d'où l'on tire les solutions de l'équation :  $S = \{-1; 2\}$



Une équation de la forme  $ax = b$  avec  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $a \neq 0$  est dite *équation linéaire à une inconnue* dans  $\mathbb{R}$ .

## Équations linéaires à deux inconnues dans $\mathbb{R}$

Une équation linéaire à deux inconnues dans  $\mathbb{R}$  est une équation qui peut s'écrire sous la forme

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b$$

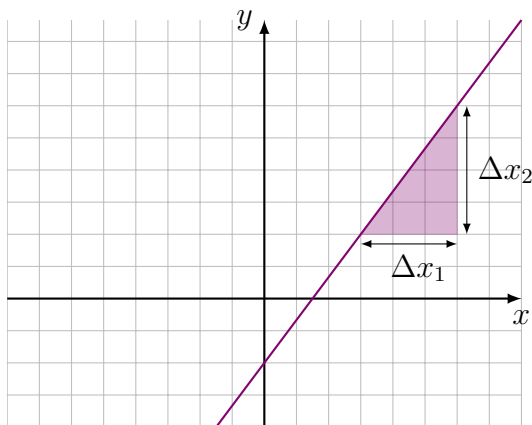
avec  $a_1, a_2, b \in \mathbb{R}$ . Si  $a_2 \neq 0$ , l'équation est équivalente à

$$x_2 = -\frac{a_1}{a_2}x_1 + \frac{b}{a_2}$$

qui représente une droite dans le plan de pente donnée par  $-\frac{a_1}{a_2}$  et d'ordonnée à l'origine égale à  $\frac{b}{a_2}$ . Lorsque  $a_1 = 0$ , la droite est horizontale (de pente nulle).

On note la pente

$$m = -\frac{a_1}{a_2} = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$$



# Chapitre 1 : Systèmes d'équations linéaires

## Objectifs.

- reconnaître et identifier les équations linéaires et leurs inconnues ;
- résoudre (trouver l'ensemble des sol.) des équations linéaires et des systèmes d'éq. linéaires ;
- travailler avec des vecteurs, matrices, spans, et autres notions vues dans le chapitre.

## 1.1 Introduction et définition

### Définition 1.3 (équation linéaire).

Une *équation linéaire* aux inconnues (variables)  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  est une équation que l'on peut mettre sous la forme

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_{n-1}x_{n-1} + a_nx_n = b,$$

où  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  sont appelés les *coefficients* et  $b \in \mathbb{R}$  est le *terme constant* (ou terme de droite). Les  $a_i$  et  $b$  peuvent être nuls ou négatifs.

### Exemple 1.4.

1)  $2x_1 - 3x_2 = 6$

2)  $-\frac{1}{2}x_1 - \sqrt{2}x_2 + x_3 = 1$

3)  $2x_2 = 10$

4)  $\sqrt{x_1} = 2$

5)  $2x_1^2 - 4x_2 = 0$

6)  $\sin(\pi/6)x_2 - x_1 + x_3 = 1$

**Définition 1.5 (système d'équations linéaires).**

Un *système d'équations linéaires* est un ensemble d'une ou de plusieurs équations linéaires aux inconnues  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

où  $a_{ij} \in \mathbb{R}$  sont les coefficients et  $b_i \in \mathbb{R}$  les termes de droite (les termes constants),  $i = 1, \dots, m$  et  $j = 1, \dots, n$ . On a  $n =$  nombre d'inconnues et  $m =$  nombre d'équations.

**Exemple 1.6.**

$$1) \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 4 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

$$2) x_1 - \sin(\pi/6)x_2 + x_3 = 0$$

$$3) \begin{cases} x_2 - x_4 = -\frac{1}{2} \\ x_1 = 0 \\ x_5 = 8 \end{cases}$$

**Définition 1.7 (solution).**

Une *solution* d'un système est une liste de nombres réels  $(s_1, s_2, \dots, s_n)$  qui, une fois substitués dans le système, transforme chaque équation en une égalité. On la note des fois  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ .

**Avec l'exemple 1)) :**  $(2, -1)$  est une solution car elle vérifie les deux équations du système. Par contre  $(4, 0)$  n'est pas une solution car elle ne vérifie pas la deuxième équation :

$$4 - 2 \cdot 0 = 4 \quad \text{et} \quad 4 + 0 = 4 \neq 0$$

## 1.2 Nombre de solutions d'un système linéaire

**Définition 1.8 ((in)compatible).**

Un système est dit *compatible* ou *consistant* s'il admet une unique solution ou une infinité de solutions.

Un système n'admettant aucune solution est dit *incompatible* ou *inconsistant*.

**Théorème 1.9.** *Un système d'équations linéaires à  $n$  inconnues à coefficients réels satisfait exactement une seule des situations suivantes :*



Type II : on multiplie une équation pas un nombre réel  $\lambda$  non-nul, par exemple l'équation  $i$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ \lambda a_{i1}x_1 + \lambda a_{i2}x_2 + \cdots + \lambda a_{in}x_n = \lambda b_i \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n = b_j \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.$$

Type III : on rajoute à une équation un multiple d'une autre, par exemple  $\lambda$  fois l'équation  $i$  à l'équation  $j$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ (\lambda a_{i1} + a_{j1})x_1 + \cdots + (\lambda a_{in} + a_{jn})x_n = \lambda b_i + b_j \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.$$

*Remarque:* On appelle ces opérations les *opérations élémentaires*. Elles sont réversibles.

## Écriture matricielle

Il existe deux matrices associées à un système : la matrice des coefficients, notée  $A$ , et la matrice augmentée, notée  $B$ , qui contient une colonne additionnelle avec les termes constants.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & a_{ij} & \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{éq. 1} \\ \leftarrow \text{éq. 2} \\ \\ \leftarrow \text{éq. } i \\ \\ \leftarrow \text{éq. } m \end{array}$$

$$B = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

$\uparrow x_1$                        $\uparrow x_j$

La matrice  $A$  est de taille  $m \times n$  (lignes-colonnes  $\rightarrow$  lincoln) et la matrice  $B$  est de taille  $m \times (n + 1)$  On dira que  $i$  est l'indice de ligne, et  $j$  l'indice de colonne. On note la matrice  $A$  avec

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

**Exemple 1.10.**

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$$

**Définition 1.11** (équivalence selon les lignes).

Deux systèmes sont *équivalents (selon les lignes)* si on peut passer de l'un à l'autre par une opération élémentaire (sur les lignes!). Deux systèmes équivalents ont le même ensemble de solutions.

**Définition 1.12** (opération élémentaire).

Soit  $A$  une matrice  $m \times n$  et notons par  $L_i$  la ligne  $i$  de  $A$ . Une *opération élémentaire* sur une ligne d'une matrice est une opération du type I, II ou III définie ci-dessous :

Type I : on permute deux lignes de la matrice ;

Type II : on multiplie une ligne par un nombre réel non-nul ;

Type III : on rajoute à une ligne un multiple d'une autre.

*Remarques* : il s'agit des trois seules opérations qu'on accepte et on ne fait pas d'opérations élémentaires sur les colonnes, car cela change l'ensemble des solutions de notre système.

## L'algorithme de réduction ou méthode de Gauss-Jordan

### Objectifs.

- reconnaître des formes échelonnées (E) et échelonnées-réduites (ER) ;
- obtenir les formes E et ER à l'aide de l'algorithme de Gauss-Jordan ;
- trouver l'ensemble des solutions en utilisant les formes E et ER.

**But** : on va échelonner la matrice de notre système linéaire pour pouvoir répondre à la question : est-ce que notre système linéaire admet une unique solution ? On utilisera les opérations élémentaires définies précédemment.

**Exemple 1.13.**

$$S = \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = -1 \\ 4x_2 - 2x_1 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

On obtient la matrice augmentée  $B = \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 2 & 2 \end{array} \right)$  qui est de taille  $3 \times 4$

BUT : on va passer de  $S$  à  $S'$  qu'on aimerait être sous la forme  $S' = \begin{cases} x_1 = \dots \\ x_2 = \dots \\ x_3 = \dots \end{cases}$

Or  $S'$  s'écrit sous forme matricielle comme :  $\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \end{array} \right)$

On va procéder par étapes, en utilisant les 3 opérations élémentaires autorisées, et passer de  $B$  à  $\left( \begin{array}{ccc|c} * & \dots & \dots & \dots \\ 0 & * & \dots & \dots \\ 0 & 0 & * & \dots \end{array} \right)$

Etape 0 : permuter des lignes si on a des zéros bien placés.

Etape 1 : on élimine  $x_1$  des équations 2 et 3. C'est-à-dire qu'on va mettre des zéros en coefficient 21 et 31.

$$B = \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 2 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow 2L_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & -1 \end{array} \right)$$

Etape 2 : On élimine  $x_2$  de l'éq 3 = mettre un zéro en coeff 32.  $\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & -2 \end{array} \right)$

Cette matrice correspond au système  $S' = \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_2 = 1 \\ 8x_3 = -2 \end{cases}$

On obtient que  $x_2 = 1$  et  $x_3 = -1/4$ . On peut trouver  $x_1$  par substitution :  $x_1 = 3/4$ . Donc  $S = (3/4, 1, -1/4)$ .

MAIS : on voulait  $B \sim \dots \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \end{array} \right)$ .

Etape 3 : on aimerait un 1 en 33 et des zéros en coeff 13 et 23.

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow \frac{1}{8}L_3} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 \end{array} \right)$$

Etape 4 : on met un zéro en 12 et un 1 en 11.

$$L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2 \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 \end{array} \right) \underset{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1}{\sim} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 \end{array} \right) \text{ elle correspond à } S' = \begin{cases} x_1 = 3/4 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -1/4 \end{cases}$$

En résumé :

$$B = \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 2 & 2 \end{array} \right) \underset{\text{Algo}}{\sim} \dots \underset{\text{Algo}}{\sim} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -2 \end{array} \right) \underset{\text{Algo}}{\sim} \dots \underset{\text{Algo}}{\sim} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 \end{array} \right)$$

**Définition 1.14** (Forme échelonnée et échelonnée réduite).

Une matrice est dite *échelonnée* si ses lignes vérifient les conditions ci-dessous :

1. toute ligne de zéros n'est suivie que de lignes de zéros ;
2. l'indice de colonne du premier terme non-nul d'une ligne est strictement supérieur à celui du premier terme non-nul de la ligne précédente.

$$\left( \begin{array}{cccccccc} (*) & * & \dots & & & \dots & \dots & * \\ 0 & (*) & * & \dots & & \dots & \dots & * \\ 0 & 0 & 0 & (*) & * & \dots & \dots & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (*) & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & (*) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right)$$

On appelle *pivot* (noté  $(*)$  ci-dessus) d'une ligne non-nul le terme non-nul le plus à gauche dans la ligne. De la condition 2, on en déduit que tous les termes situés dans une colonne en dessous d'un pivot sont nuls. On appellera une *colonne pivot*, une colonne qui contient un pivot. Une matrice est dite *échelonnée réduite* si 1. et 2. sont vérifiées et si

3. les pivots valent 1 et sont les seuls termes non-nuls de la colonne.

**Exemple 1.15.**

$$1. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ sont échelonnées-réduites.}$$

2. Soit

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = -1 \\ 6x_1 - 4x_2 = 3 \end{cases} \text{ voir le cours.}$$

**Obtenir des informations sur les solutions grâce aux formes échelonnées et échelonnées réduites**

On rappelle qu'on aura toujours soit une unique solution, soit une infinité de solutions, soit aucune solution.

**Exemple 1.16.**

$$S = \begin{cases} 3x_2 - 6x_3 + 6x_4 + 4x_5 = -5 \\ 3x_1 - 7x_2 + 8x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 9 \\ 3x_1 - 9x_2 + 12x_3 - 9x_4 + 6x_5 = 15 \end{cases}$$

On obtient

$$B = \left( \begin{array}{ccccc|c} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{array} \right)$$

On commence par ré-organiser les lignes en permutant :  $L_1 \leftrightarrow L_2$  et après  $L_2 \leftrightarrow L_3$ .

$$B \sim \begin{pmatrix} 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 0 & -2 & 4 & -4 & -2 & 6 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2} \begin{pmatrix} 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2} \begin{pmatrix} 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice est sous forme échelonnée. On a 3 pivots, en colonnes 1, 2 et 5. Cette matrice correspond à

$$S' = \begin{cases} 3x_1 - 7x_2 + 8x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 9 \\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 = -3 \\ x_5 = 4 \end{cases}$$

On pourrait alors substituer  $x_5 = 4$  dans les autres équations mais après on ne sait pas très bien comment procéder (du moins on n'a pas vraiment une stratégie efficace).

$$\begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - 8L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -7 & -5 & 0 & 0 & -23 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + 7L_2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 & 9 & 0 & -72 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1}{\sim} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

Cette dernière matrice est la forme ER de la matrice  $B$ . Elle correspond à

$$S' = \begin{cases} x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -24 \\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -7 \\ x_5 = 4 \end{cases}$$

On peut reformuler  $S'$  comme  $S' = \begin{cases} x_1 = 2x_3 - 3x_4 - 24 \\ x_2 = 2x_3 - 2x_4 - 7 \\ x_5 = 4 \end{cases}$

On aura une infinité de solutions car  $x_3$  et  $x_4$  peut valoir n'importe quel réel dans  $\mathbb{R}$ . Par exemple  $s = (-24, -7, 0, 0, 4)$  est une solution pour  $x_3 = x_4 = 0$ .

L'ensemble de solutions est

$$S = \{(2k - 3l - 24, 2k - 2l - 7, k, l, 4) \mid k, l \in \mathbb{R}\}$$

On dira que  $x_1, x_2$  et  $x_5$  sont des variables de bases (ou principales) et  $x_3, x_4$  sont des variables libres (ou non-principales).

**Définition 1.17** (variables libres et de bases).

Les *variables de bases* correspondent aux variables des colonnes pivots et les *variables libres* à celles qui ne sont pas des colonnes pivots.

**Exemple 1.18.**

Soient  $A$  et  $B$  les deux matrices ci-dessous.

$$A = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{array} \right) \quad B = \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Pour  $A$  :  $A$  est échelonnée et les variables  $x_1, x_2$  et  $x_4$  sont de bases et  $x_3$  libre.

Pour  $B$  :  $B$  échelonnée-réduite et  $x_1$  est libre,  $x_2$  et  $x_3$  de bases.

**Exemple 1.19.**

Soit  $B$  une forme échelonnée associée à un système d'équations linéaire  $S$ .

$$B = \left( \begin{array}{ccc|c} \textcircled{-3} & 4 & 1 & 8 \\ 0 & \textcircled{-1} & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{3} \end{array} \right)$$

On a trois pivots :  $-3, -1$  et  $3$ , en colonnes 1,2 et 4 respectivement. La matrice  $B$  correspond au système  $S'$  ( $S'$  est équivalent à  $S$ ) :

$$S' = \begin{cases} -3x_1 + 4x_2 + x_3 = 8 \\ -x_2 + x_3 = -2 \\ 0 = 3 \end{cases}$$

Or la troisième équation n'admet pas de solutions (elle est du type  $0 = 1$ ). Le système est inconsistant.

**Constat** : le système est inconsistant si la matrice augmentée sous forme échelonnée ou échelonnée-réduite (unique!!) possède un pivot dans la colonne des termes de droite, c'est-à-dire une ligne du type

$$\left( 0 \ 0 \ \dots \ 0 \mid \textcircled{*} \right)$$

**Quand le système est compatible/consistant on a deux cas possibles**

**Premier cas** : une unique solution  $\Leftrightarrow$  on n'a pas de variables libres

$\Leftrightarrow$  toutes les variables sont des variables de base

$\Leftrightarrow$  toutes les colonnes de la matrice des coefficients ont un pivot.

Par exemple :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} \textcircled{*} & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \textcircled{*} & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \textcircled{*} & \dots \end{array} \right)$$

**Deuxième cas** : une infinité de solutions  $\Leftrightarrow$  on a au moins une variable libre

$\Leftrightarrow$  on a au moins une colonne de la matrice des coefficients qui est une colonne non-pivot

Par exemple :

$$\left( \begin{array}{cccc|c} \textcircled{*} & \dots & * & \dots & \dots \\ 0 & \textcircled{*} & * & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{*} & \dots \end{array} \right)$$

**Théorème 1.20.** *Un système d'équations linéaire est compatible si et seulement si la matrice augmentée sous forme échelonnée ou échelonnée-réduite n'a pas de ligne du type*

$$\left( 0 \ 0 \ \dots \ 0 \mid \textcircled{*} \right)$$

L'ensemble de solutions d'un système compatible se compose

1. d'une unique solution si le système ne possède pas de variables libres ;
2. d'une infinité de solutions si le système possède au moins une variable libre.

**Définition 1.21** (système homogène).

Un système est dit *homogène* si tous les termes de droite ( $b_i$ ) sont nuls. Une solution est dite triviale si elle est nulle.

$$\left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 0 \end{array} \right)$$

*Remarque :* Tous les systèmes homogènes sont compatibles car ils admettent toujours au moins une solution, la solution triviale  $s = (0, 0, \dots, 0)$ .

## 1.4 Équations vectorielles

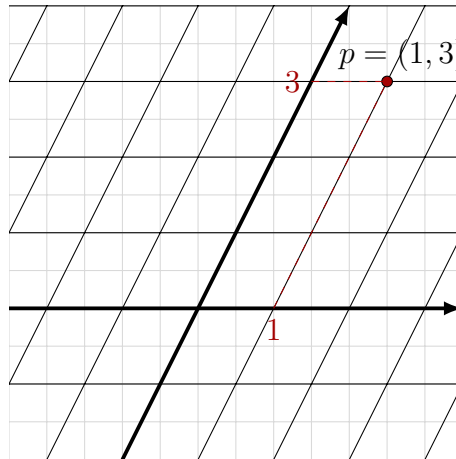
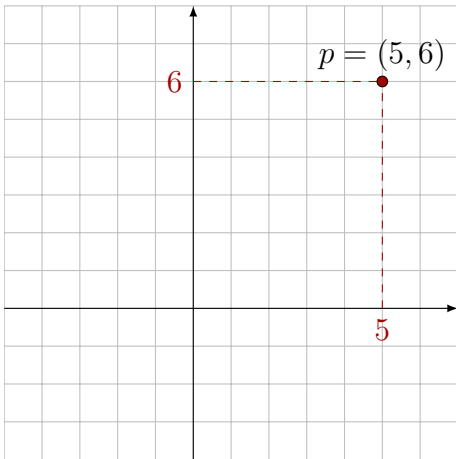
### Objectifs.

- savoir ce qu'est un vecteur et l'ensemble  $\mathbb{R}^n$  ;
- travailler avec des vecteurs et des combinaisons linéaires ;
- comprendre le lien entre système, matrice et équation vectorielle ;
- savoir ce qu'est le span.

Systèmes d'équations linéaires  $\xleftrightarrow{\S 1.1-\S 1.3}$  Représentation matricielle  
 $\xleftrightarrow{\S 1.4}$  Représentation vectorielle

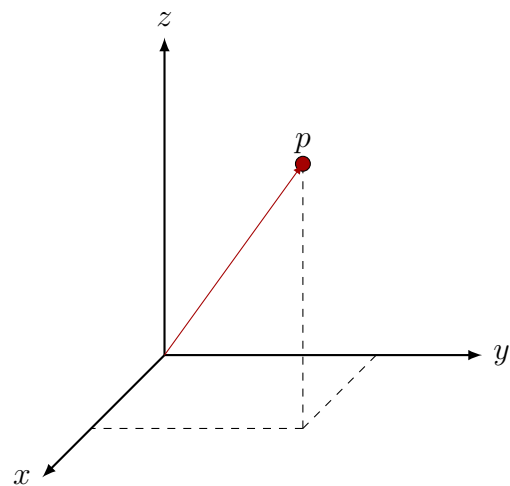
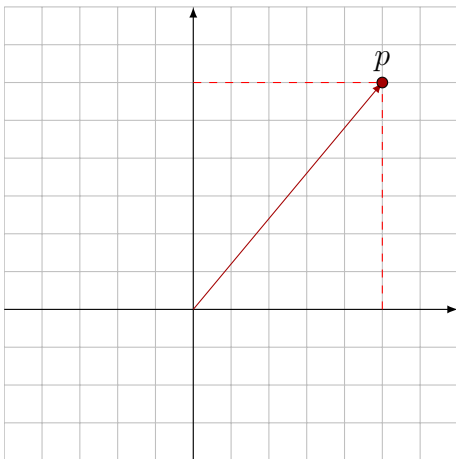
## Les vecteurs, $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^2$  est l'ensemble des points à deux coordonnées. Pour définir cela on doit fixer un repère (i.e. une origine et une "graduation".)



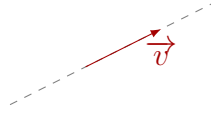
On peut changer le repère, dans ce cas le point sera toujours le même mais ses coordonnées seront différentes. On peut voir cela comme un changement d'unité de mesure. On verra cela en détail dans le chapitre 4.

Au lieu de voir  $\mathbb{R}^2$  comme un ensemble de points, on va voir  $\mathbb{R}^2$  comme un ensemble de vecteurs. Ces deux manières - points et vecteurs - sont liées.



**Définition 1.22** (vecteur ou vecteur colonne).

Un *vecteur* est une matrice à une seule colonne  $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$  avec  $v_i \in \mathbb{R}$ . On appelle les  $v_i$  les *composantes* du vecteur  $\vec{v}$ .

On les représente par 

**Définition 1.23** ( $\mathbb{R}^n$ ).

On définit  $\mathbb{R}^n$  comme l'ensemble de tous les vecteurs à  $n$  composantes, noté

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \mid v_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n \right\}$$

**Exemple 1.24.**

On a par exemple :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -1/7 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

Mais par contre on a, entre autre, que  $\vec{z} \notin \mathbb{R}^3$ ,  $\vec{v} \notin \mathbb{R}^3$ ,  $\vec{v} \notin \mathbb{R}^4$ .

**Définition 1.25** (égalité entre vecteurs).

Deux vecteurs sont *égaux* si

1. ils ont le même nombre de composantes ;
2. les composantes sont les mêmes.

## Propriétés algébriques de $\mathbb{R}^n$

Addition : soient  $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ , on a

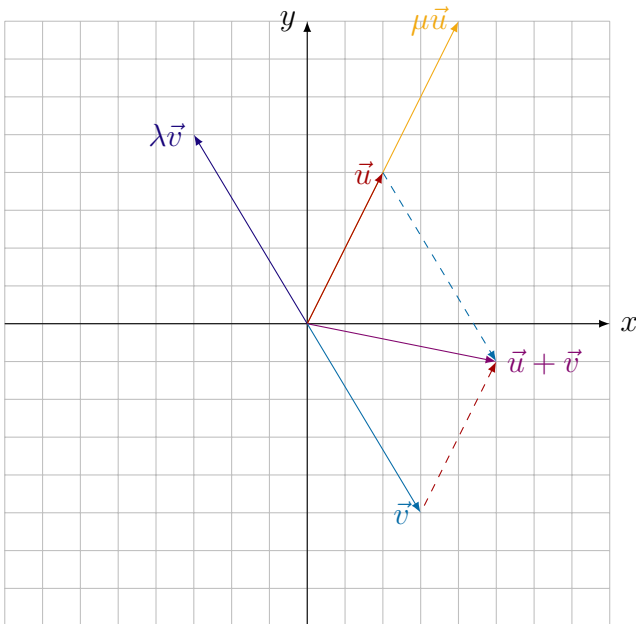
$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Multiplication par un scalaire : soient  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda \vec{v} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \\ \vdots \\ \lambda v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

**Exemple 1.26.**

Soient  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda = -1$ ,  $\mu = 2$ . On a  $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $\mu\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

**Propriétés**

Soient  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . On a les propriétés suivantes

1.  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
2.  $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$
3.  $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$
4.  $(\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}$
5.  $\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u} = \lambda\mu\vec{u}$
6.  $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$
7.  $\vec{u} + (-1)\vec{u} = \vec{u} - \vec{u} = \vec{0}$
8.  $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

### Exemple 1.27.

Soient les vecteurs suivants de  $\mathbb{R}^3$  :  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ . On peut créer un nouveau vecteur les combinant. Par exemple de la manière suivante :

$$2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (-2) \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

On a que  $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$  est un nouveau vecteur de  $\mathbb{R}^3$  et est une combinaison des quatre vecteurs.

## Généralisation à $\mathbb{R}^m$

**Définition 1.28** (combinaison linéaire).

Soient  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ . Alors le vecteur  $\vec{b}$  défini par

$$\vec{b} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n$$

est appelé *combinaison linéaire* des  $\vec{a}_i$  et les  $\lambda_i$  sont appelés les coefficients de la combinaison linéaire.

Remarques :

- 1) Certains  $\lambda_i$  (ou tous) peuvent être nuls ou négatifs.
- 2)  $\vec{b}$  et  $\lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n$  s'appellent comb. linéaires.
- 3) Soit on connaît  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n$  et on calcule  $\vec{b}$ , soit on connaît  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n, \vec{b}$  et on cherche  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

## Liens systèmes-matrices et équations vectorielles

Soient  $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$  et  $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ . Cherchons  $\lambda_1, \lambda_2$  et  $\lambda_3$  tels que  $\vec{b}$  soit une combinaison linéaire de  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$  et  $\vec{a}_3$ .

$$\Leftrightarrow \text{Trouver } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \text{ tels que } \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 = \vec{b}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3\lambda_1 \\ 4\lambda_1 \\ -2\lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3\lambda_2 \\ -4\lambda_2 \\ 4\lambda_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2\lambda_3 \\ 3\lambda_3 \\ 3\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3\lambda_1 - 3\lambda_2 - 2\lambda_3 \\ 4\lambda_1 - 4\lambda_2 + 3\lambda_3 \\ -2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 3\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 3\lambda_1 - 3\lambda_2 - 2\lambda_3 = -1 \\ 4\lambda_1 - 4\lambda_2 + 3\lambda_3 = -1 \\ -2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 3\lambda_3 = 3 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -2 & -1 \\ 4 & -4 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 3 & 3 \end{array} \right) \\
&\Leftrightarrow \sim \dots \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = -1 \end{cases} \text{ ou } S = (1, 2, -1).
\end{aligned}$$

## Généralisation

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Leftrightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 0 \end{array} \right) \\
\Leftrightarrow x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}$$

**Théorème 1.29.** Une équation vectorielle

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}$$

a le même ensemble de solutions que le système linéaire correspondant à la matrice augmentée

$$\left( \vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \dots \quad \vec{a}_n \mid \vec{b} \right)$$

**Remarque :** si le système admet une solution  $\vec{b}$  sera une combinaison linéaire des colonnes de  $A = (\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \dots \quad \vec{a}_n)$ .

**Exemple 1.30.**

Soit  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Trouver  $\lambda_1, \lambda_2$  tels que  $\vec{b} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2$ .

1)  $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  : on a  $\left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow S = (3, 1)$  donc  $\vec{b} = 3\vec{a}_1 + \vec{a}_2$

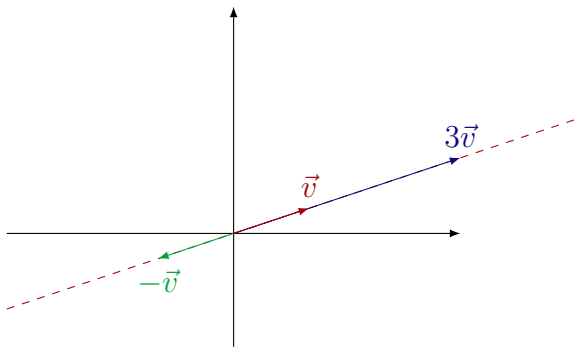
2)  $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$  : on a  $\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$ , or on a une ligne du type  $\left( 0 \ 0 \ \dots \ 0 \mid \textcircled{*} \right)$ .  
Le système n'admet pas de solution.

3)  $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$  :  $\left( \begin{array}{cc|c} -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$  donc  $\lambda_1 - 2\lambda_2 = -1$ ,  $\lambda_2$  est libre  $\Rightarrow \lambda_1 = 2\lambda_2 - 1$ , on pose  $\lambda_2 = t, t \in \mathbb{R}$ , et l'ensemble des solutions est  $S = \{(2t - 1, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ .

**Ensembles engendrés et combinaisons linéaires****Objectifs.**

- décrire explicitement l'ensemble des solutions à l'aide du span ;
- comprendre le lien entre système, matrice, équation vectorielle et équation matricielle ;
- être capable de calculer le produit "matrice-vecteur" ;
- savoir sous quelles conditions une équation matricielle admet une solution.

On commence par un exemple d'un ensemble engendré par un vecteur de  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Alors l'ensemble des combinaisons linéaires de  $\vec{v}$  est l'ensemble des vecteurs  $\lambda \vec{v}, \lambda \in \mathbb{R}$ . Il s'agit d'une droite passant par l'origine et de direction  $\vec{v}$ .



**Ensemble engendré par deux vecteurs de  $\mathbb{R}^2$ .** Soient  $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ .

1) si  $\vec{v}, \vec{w}$  n'ont pas la même direction on obtient l'espace  $\mathbb{R}^2$  en entier. On verra plus tard pourquoi c'est vrai.

2) si  $\vec{v}, \vec{w}$  ont la même direction, on obtient une droite passant par l'origine et de direction  $\vec{v}$ .

**Définition 1.31** (span ou vect).  
 Soient  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$  des vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ . L'ensemble des combinaisons linéaires de  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$  s'appelle le *span*. On le note

$$\text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\} = \{\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_p \vec{v}_p \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}\}$$

On peut aussi le noter  $\text{Vect}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ .

**Remarques**

- 1)  $\text{span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\} \subseteq \mathbb{R}^n$ .
- 2)  $\vec{0} \in \text{span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$ .

## Une utilité du Span

On va utiliser le span pour décrire l'ensemble des solutions (s'il y a des solutions).

**Exemple 1.32.**

- 1)  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ . On a

$$\text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

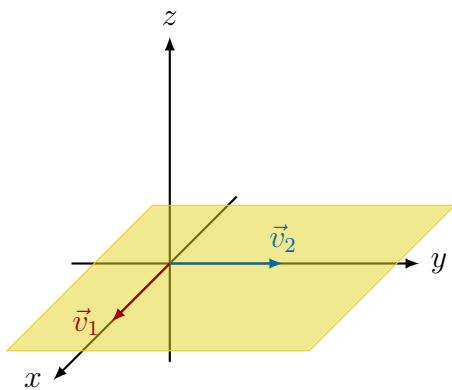


FIGURE 1 – Exemple 1)

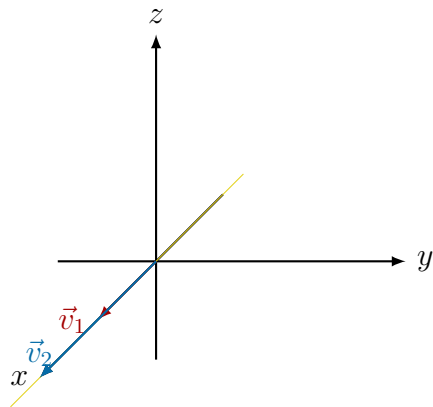


FIGURE 2 – Exemple 2)

- 2)  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ . On a

$$\text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = \{\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 (4\vec{v}_1) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} = \{\mu \vec{v}_1 \mid \mu \in \mathbb{R}\}$$

## 1.5 Équation matricielle

But : exprimer les combinaisons linéaires comme le produit d'une matrice et d'un vecteur.

### Produit matrice-vecteur

1.  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$A\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 5 \\ (-1) \cdot 4 + 3 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 11 \end{pmatrix}$$

2.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 \\ (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \text{IMPOSSIBLE}$$

**Constat** le produit matriciel n'est pas toujours défini. Il est défini si

$$\text{nombre de colonnes de } A = \text{nombre de lignes de } \vec{v}$$

**Définition 1.33** (Produit matrice-vecteur).

Soient  $A$  une matrice  $m \times n$  et  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ . On définit le *produit*  $A\vec{x}$  par

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

$m \times n$                        $n \times 1$                        $m \times 1$

On a  $A\vec{x} \in \mathbb{R}^m$ .

## Lien entre produit matriciel et les systèmes d'équations linéaires

**Exemple 1.34.**

$$\text{Soit } S = \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = -8 \end{cases}$$

$$\text{On a } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

On peut écrire  $S$  comme :

- 1) un système d'équation linéaires ;
- 2) une matrice augmentée  $(A \mid \vec{b})$  ;

- 3) une équation vectorielle  $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3 = \vec{b}$  où  $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  ;

- 4) une équation matricielle  $A\vec{x} = \vec{b}$ .

**Toutes les représentations ont le même ensemble de solutions.**

**Définition 1.35** (équation matricielle).

Soient  $A$  une matrice  $m \times n$  et  $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$  et  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ . Alors l'équation  $A\vec{x} = \vec{b}$  s'appelle *équation matricielle*.

**Théorème 1.36.** Soient  $A, \vec{b}, \vec{x}$  comme ci-dessus. Soient  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$  les colonnes de  $A$ . Alors l'ensemble de solution de  $A\vec{x} = \vec{b}$  est le même que

1.  $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}$  et

2.  $(\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \dots \quad \vec{a}_n \mid \vec{b})$

## Existence des solutions d'une équation matricielle

On se pose maintenant la question de savoir sous quelles les conditions, sur  $A$  et  $\vec{b}$ , est-ce que  $A\vec{x} = \vec{b}$  admet au moins une solution.

Supposons alors que  $A\vec{x} = \vec{b}$  admette une solution  $\vec{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$ .

C'est équivalent à dire que  $A\vec{s} = \vec{b}$  (que l'équation est vraie)

$$\Leftrightarrow s_1\vec{a}_1 + s_2\vec{a}_2 + \dots + s_n\vec{a}_n = \vec{b}$$

$\Leftrightarrow \vec{b}$  est une combinaison linéaire des colonnes de  $A$  (les  $\vec{a}_i$ ) avec  $s_1, \dots, s_n$  comme coefficients.

Donc  $A\vec{x} = \vec{b}$  admet une solution  $\Leftrightarrow \vec{b}$  est une combinaison linéaire des colonnes de  $A$ .

**Exemple 1.37.**

Soit  $S = \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = b_1 \\ x_2 - 4x_3 = b_2 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = b_3 \end{cases}$  un système  $3 \times 3$  avec un terme de droit général, i.e.  $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ .

On a  $S$  qui est équivalent à  $\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & -4 & b_2 \\ -4 & 5 & 9 & b_3 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 29b_1 + 23b_2 + 7b_3 \\ 0 & 1 & 0 & 16b_1 + 13b_2 + 4b_3 \\ 0 & 0 & 1 & 4b_1 + 3b_2 + b_3 \end{array} \right)$

On a 3 pivots, que des variables principales (ou des variables de base) et donc une unique solution. Donc pour n'importe quel  $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ , l'équation  $A\vec{x} = \vec{b}$  admet une unique solution, donnée par

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 29b_1 + 23b_2 + 7b_3 \\ 16b_1 + 13b_2 + 4b_3 \\ 4b_1 + 3b_2 + b_3 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour tous  $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ ,  $A\vec{x} = \vec{b}$  est compatible, ce qui est équivalent à dire que pour tout  $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\vec{b}$  est une combinaison linéaire des colonnes de  $A$ .

Donc  $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ , il existe  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$  tels que  $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 = \vec{b}$

On a vu que les coefficients de la combinaison linéaire (les  $\lambda_i$ ) sont donnés par la solution de  $A\vec{x} = \vec{b}$ .

C'est-à-dire

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 29b_1 + 23b_2 + 7b_3 \\ \lambda_2 &= 16b_1 + 13b_2 + 4b_3 \\ \lambda_3 &= 4b_1 + 3b_2 + b_3 \end{aligned}$$

Ainsi, par la définition du Span, on a que pour tous  $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\vec{b} \in \text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ .

D'un autre côté, par la définition du Span, on sait que :  $\text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\} \subset \mathbb{R}^3$ .

Mais alors on a que  $\mathbb{R}^3 \subseteq \text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$  car pour tous  $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\vec{b} \in \text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ . On peut donc en conclure que

$$\text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\} = \mathbb{R}^3$$

On peut continuer de donner des équivalences, ça nous permet d'avoir un résumé des notions vues précédemment.

On a que pour tous  $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ ,  $A\vec{x} = \vec{b}$  est compatible  $\Leftrightarrow \text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\} = \mathbb{R}^3$

Mais on a aussi par le Théorème 1.20 :  $A\vec{x} = \vec{b}$  est compatible  $\Leftrightarrow$  on n'a pas de ligne du type  $(0 \ 0 \ 0 \mid *)$  où  $* \neq 0$ .

$\Leftrightarrow$  la colonne des termes de droite n'est pas une colonne pivot

$\Leftrightarrow$  il y a un pivot dans chaque ligne de  $A$

On a un premier théorème très **important**.

**Théorème 1.38.** Soit  $A = (\vec{a}_1 \vec{a}_2 \cdots \vec{a}_n)$  une matrice  $m \times n$ . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes

- 1)  $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^m$ ,  $A\vec{x} = \vec{b}$  admet au moins une solution (est compatible)
- 2)  $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^m$ ,  $\vec{b}$  est une combinaison linéaire des colonnes de  $A$ .
- 3)  $\text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\} = \mathbb{R}^m$ , c'est à dire : les colonnes de  $A$  engendrent  $\mathbb{R}^m$ .
- 4) chaque ligne de  $A$  possède un pivot.

Remarque :  $A$  ne possède pas forcément un pivot par colonne. On ne parle pas d'unicité de la solution.

**Exemple 1.39.**

1)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , et  $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ . On obtient  $\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_2 \end{array} \right)$

La troisième colonne est une colonne non-pivot, ce qui veut dire que  $x_3$  est libre et  $x_1, x_2$  sont des variables de base.

On obtient

$$\begin{cases} x_1 = b_1 - x_3 \\ x_2 = b_2 - x_3 \\ x_3 \text{ libre} \end{cases}$$

On peut vérifier le Théorème 1.38. Il suffit de montrer qu'une des propriétés est vraie, comme elles sont équivalentes, elles seront toutes vérifiées (on peut bien sûr vérifier les 4 propriétés mais une seule suffit).

2) Soient  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ . Comme la matrice  $A$  n'a pas de pivot dans la

3<sup>ème</sup> ligne, le système  $A\vec{x} = \vec{b}$  sera incompatible pour certains vecteurs  $\vec{b}$ , ce qui rend la propriété 4 du Théorème 1.38 fausse. On peut montrer que les 4 propriétés du Théorème 1.38 sont fausses.

## 1.6 Ensembles de solutions d'une équation matricielle

### Études des solutions d'un système homogène

Soit  $A$  de taille  $m \times n$ , la matrice des coefficients associées à un système homogène. On considère  $A\vec{x} = \vec{0}$  (ici le terme de droite est dans  $\mathbb{R}^m$ ), qui est une équation toujours compatible car  $\vec{s} = \vec{0}$  est une solution (ici  $\vec{s} \in \mathbb{R}^m$ ).

#### Exemple 1.40.

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . On a  $A\vec{x} = \vec{0}$  est compatible car  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  est une solution.

Résultat (rappel) : un système linéaire homogène est toujours compatible. On a soit

- 1) une unique solution  $\vec{s} = \vec{0}$ , soit
- 2) une infinité de solutions (y compris la solution triviale).

$$\begin{array}{ccc}
 & A\vec{x} = \vec{0} & \vec{s} = \vec{0} \in \mathbb{R}^m \\
 \nearrow & \uparrow & \nwarrow \\
 m \times n & \in \mathbb{R}^n & \in \mathbb{R}^m
 \end{array}$$

#### Exemple 1.41.

$$\text{Soit } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0 \\ 6x_1 + 7x_2 + 8x_3 = 0 \end{cases}$$

On a

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 6 & 7 & 8 & 0 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

On a deux pivots (en colonnes 1 et 2), donc  $x_1, x_2$  sont des variables principales et  $x_3$  est libre. On obtient

$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -2x_3 \\ x_3 \text{ libre} \end{cases}$$

On prend  $t \in \mathbb{R}$  comme paramètre pour  $x_3$ . On obtient  $\vec{s} = \begin{pmatrix} t \\ -2t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . On dira que  $\vec{x}$  est la solution générale de  $A\vec{x} = \vec{0}$ .

On peut écrire l'ensemble des solutions avec le span :  $S = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$

**Exemple 1.42.**

On considère le système 
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 0 \\ 4x_1 + 8x_2 - 10x_3 = 0 \end{cases}$$

On obtient 
$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -6 & 0 \\ 4 & 8 & -10 & 0 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

On a que  $x_1, x_3$  sont des variables principales et  $x_2$  est libre.

On a 
$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$
 et  $x_2$  est libre.

Choix 1 : on prend  $t \in \mathbb{R}$  comme paramètre pour  $x_2$ . On a  $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$   $t \in \mathbb{R}$

Choix 2 : on reformule notre système comme 
$$\begin{cases} x_2 = -\frac{1}{2}x_1 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$
 avec, cette fois-ci,  $x_1$  comme variable

libre. On prend  $k \in \mathbb{R}$  comme paramètre pour  $x_1$ . On a  $\vec{x} = \begin{pmatrix} k \\ -\frac{1}{2}k \\ 0 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

Avec le choix 1, on obtient l'ensemble de solutions  $S_1 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ .

Avec le choix 2, on obtient l'ensemble de solutions  $S_2 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ .

On a que  $S_1 = S_2$  car les deux vecteurs choisis sont multiples l'un de l'autre

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

## Études des solutions d'un système non-homogène

On considère  $A\vec{x} = \vec{b}$  avec  $\vec{b} \neq \vec{0}$  et on s'intéresse à des systèmes compatibles, ayant une infinité de solutions.

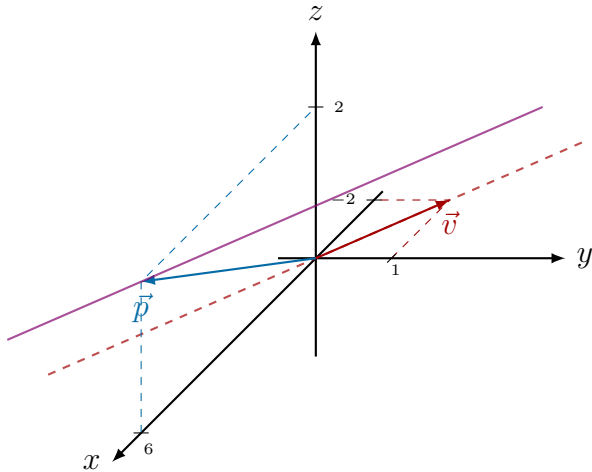
### Exemple 1.43.

On considère le système 
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 0 \\ 4x_1 + 8x_2 - 10x_3 = 4 \end{cases}$$

On a  $\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -6 & 0 \\ 4 & 8 & -10 & 4 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$

On a 
$$\begin{cases} x_1 = 6 - 2x_2 \\ x_3 = 2 \\ x_2 \text{ libre.} \end{cases}$$

Soit  $t \in \mathbb{R}$  pour  $x_2$ . On obtient  $\vec{s} = \begin{pmatrix} 6-2t \\ t \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$ .



On peut reformuler  $\vec{s}$  en

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{p} + t\vec{v}, \quad t \in \mathbb{R}$$

où  $\vec{v}$  est **une** solution de  $A\vec{x} = \vec{0}$ , et  $t\vec{v}, t \in \mathbb{R}$  est la solution générale de  $A\vec{x} = \vec{0}$ . Géométriquement on a fait une translation de  $\text{span}\vec{v}$  selon le vecteur  $\vec{p}$ . L'ensemble de solution de  $A\vec{x} = \vec{b}$  est la droite parallèle à l'ensemble de solution de  $A\vec{x} = \vec{0}$ , passant par  $\vec{p}$ .

On a que  $\vec{p}$  est une solution quelconque (ou solution particulière) de  $A\vec{x} = \vec{b}$ . On aurait pu prendre un autre vecteur (i.e. une autre solution de  $A\vec{x} = \vec{b}$ ).

On a, si on schématise :

$$\{\text{solution de } A\vec{x} = \vec{b}\} = (\text{solution quelconque } \vec{p}) + (\text{sol. générale de } A\vec{x} = \vec{0})$$

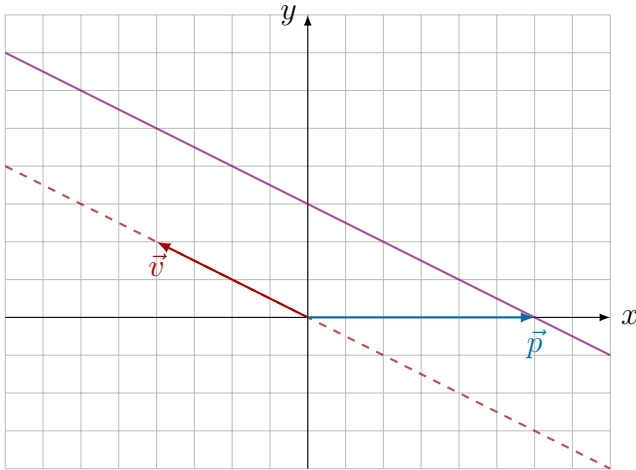
**Exemple 1.44.**

Soit  $\{x_1 + 2x_2 = 3\}$

Trouver la solution de  $A\vec{x} = \vec{b}$  sous la forme  $\vec{s} = \vec{p} + t\vec{v}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

On a  $x_1$  de base,  $x_2$  libre données par  $x_1 = 3 - 2x_2$  et  $x_2 = t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Ceci nous donne

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 3 - 2t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$



L'ensemble des solutions est la **droite violette**. On peut la voir comme un ensemble de points de  $\mathbb{R}^2$  sur la **droite violette** ou comme l'ensemble des vecteurs partant de l'origine et allant sur un point de la **droite violette**

**Théorème 1.45.** Soient  $A$  une matrice  $m \times n$ ,  $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$  tels que  $A\vec{x} = \vec{b}$  admette une solution. Soit  $\vec{p}$  une solution quelconque (particulière) de  $A\vec{x} = \vec{b}$ . Alors l'ensemble des solutions de  $A\vec{x} = \vec{b}$  est l'ensemble des vecteurs  $\vec{w} = \vec{p} + \vec{v}_t$  où  $\vec{v}_t$  est une solution de  $A\vec{x} = \vec{0}$ .

**Suite de l'exemple 1.43.**

On reprend l'exemple 1.43. Avec différentes valeurs pour  $t$  on obtient différentes solutions  $\vec{w}$  :

$$\text{Avec } t = 1, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Avec } t = -1, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Avec } t = 2, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

## 1.7 Indépendance linéaire

### Objectifs.

- savoir exprimer l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène et non-homogène ;
- connaître l'indépendance/la dépendance linéaire ;
- savoir si un ensemble de vecteurs est linéairement indépendant ou dépendant.

On considère ici  $A\vec{x} = \vec{0}$  et on cherche des conditions sur les colonnes de  $A$  pour que  $A\vec{x} = \vec{0}$  n'admette que la solution triviale.

### Exemple 1.46.

Soit le système suivant

$$S = \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 9x_3 = 0 \\ 5x_1 + 9x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Le système s'écrit comme équation matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\vec{a}_1} + x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}}_{\vec{a}_2} + x_3 \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\vec{a}_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

C'est-à-dire qu'on aimerait trouver  $x_1, x_2, x_3$  tels que  $\vec{0}$  soit une combinaison linéaire des  $\vec{a}_i$ . Clairement  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$  est une solution. Mais est-ce la seule ?

Si oui : on dira que  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  sont linéairement indépendants.

Si non : ils sont linéairement dépendants.

On résout le problème, pour trouver les solutions.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 3 & 5 & 9 & 0 \\ 5 & 9 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 33 & 0 \\ 0 & 1 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{donc } \vec{s} = \begin{pmatrix} -33t \\ 18t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -33 \\ 18 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

On a une infinité de solutions  $\Rightarrow \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  sont linéairement dépendants.

**Définition 1.47** (linéairement (in)dépendante).

Une famille de vecteurs  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$  de  $\mathbb{R}^n$  est *linéairement indépendante* (ou libre) si l'unique solution de

$$x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \dots + x_p\vec{v}_p = \vec{0}$$

est  $\vec{s} = \vec{0}$  ( $x_1 = x_2 = \dots = x_p = 0$ ). Sinon on dira que la famille est *linéairement dépendante* (ou liée).

**Exemple 1.48.**

Soient  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ . On va d'abord regarder la dépendance/indépendance linéaire entre  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$ . C'est-à-dire

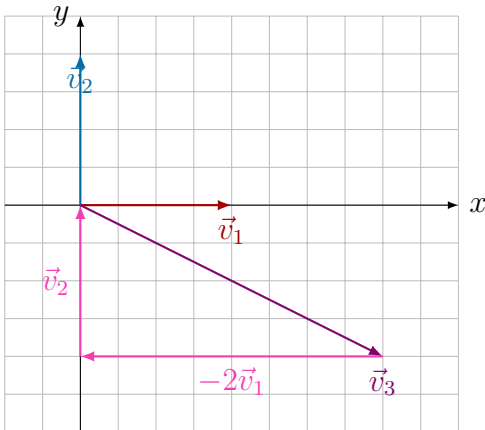
$$x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a donc une unique solution  $\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  donc  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$  est une famille linéairement indépendante.

Mais par si on considère les trois vecteurs, on doit résoudre  $x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + x_3\vec{v}_3 = \vec{0}$ . Or on voit que

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  est linéairement dépendante car  $\vec{s} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  est une solution. Comme illustré dans le graphe ci-dessous.



Cas particuliers :

- a)  $\{\vec{v}_1\}, \vec{v}_1 \in \mathbb{R}^n : \{\vec{v}_1\}$  est lin. indépendante  
 $\Leftrightarrow x_1\vec{v}_1 = \vec{0}$  n'admet que  $x_1 = 0$  comme solution  
 $\Leftrightarrow \vec{v}_1 \neq \vec{0}$ , car si  $\vec{v}_1 = \vec{0}$  on a une infinité de solution pour  $x_1$ .
- b)  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$  est lin. indépendante  
 $\Leftrightarrow x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 = \vec{0}$  n'admet que  $x_1 = x_2 = 0$  comme solution  
 $\Leftrightarrow \vec{v}_1, \vec{v}_2$  ne sont pas multiples l'un de l'autre (donc  $\vec{v}_1 \neq \mu\vec{v}_2$  pour n'importe quel  $\mu \in \mathbb{R}$ )  
 $\Leftrightarrow \vec{v}_1, \vec{v}_2$  ne sont pas sur la même droite.

**Définition 1.49** (colinéaire).

Soient  $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^n$ . Ils sont *colinéaires* s'il existe  $\mu \in \mathbb{R}$  tel que  $\vec{v}_1 = \mu\vec{v}_2$ .

Résultat  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  sont colinéaires  $\Leftrightarrow \vec{v}_1, \vec{v}_2$  sont linéairement dépendants.

## Méthode 1

On met les vecteurs dans une matrice  $A = (\vec{v}_1 \vec{v}_2 \cdots \vec{v}_p)$  et on regarde si  $\vec{0} \in \mathbb{R}^p$  est l'unique solution de  $A\vec{x} = \vec{0}$ . On utilise par exemple l'algorithme de Gauss-Jordan.

**Théorème 1.50.** *Les colonnes d'une matrice sont linéairement indépendantes si et seulement si  $A\vec{x} = \vec{0}$  n'admet que la solution triviale.*

*Démonstration.* voir le cours. □

## Méthode 2 dite d'"observation"

Au lieu de directement appliquer l'algorithme, on peut observer les vecteurs et essayer de trouver une solution non-triviale. Attention cela ne fonctionne clairement pas tout le temps

**Exemple 1.51.**

Soient  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  on voit que  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$  sont colinéaires.

On aura donc que  $x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  admet  $\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  comme solution mais

aussi  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  (et donc une infinité de solutions).

Donc  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  est linéairement dépendante.

**Théorème 1.52.** *Une famille de vecteurs  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$  de  $\mathbb{R}^n$  avec  $p \geq 2$  est linéairement dépendante si et seulement si au moins un des vecteurs est combinaison linéaire des autres.*

**Suite de l'exemple 1.51 :**

On a  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Donc  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  est une combinaison linéaire de  $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Mais  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$  n'admet pas de solution, donc  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  n'est pas combinaison linéaire des autres.

**Théorème 1.53.** *Toute famille  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$  de  $\mathbb{R}^n$  est linéairement dépendante si  $p > n$ .*

## Cas particuliers

**Théorème 1.54.** *Toute famille de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  contenant  $\vec{0}$  est linéairement dépendante.*

*Remarque:* Soit une famille  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$  de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  :

- 1) si  $p > n$  alors  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$  est linéairement dépendante
- 2) si  $p \leq n$ , la famille peut être linéairement dépendante, ou linéairement indépendante.

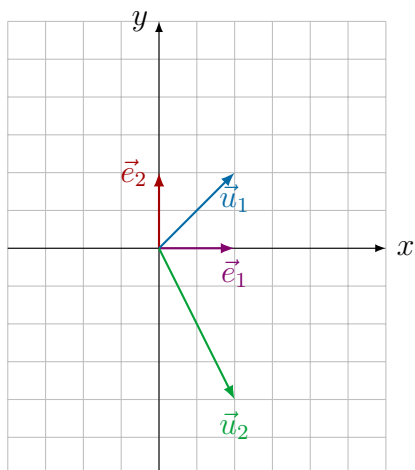
## Bases de $\mathbb{R}^n$

On cherche une famille de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  tels que

- 1) tout vecteur de  $\mathbb{R}^n$  s'écrit comme combinaison linéaire de la famille ;
- 2) la famille est linéairement indépendante.

Dans  $\mathbb{R}^2$

On commence par la situation "la plus simple".



On prend  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . On appelle ces deux vecteurs par

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alors  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ . On doit pour cela, vérifier les deux propriétés ci-dessus.

On a :

- 1) pour tout  $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ , on a

$$\vec{b} = b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**ICI on a que les coefficients de la combinaison linéaire sont égaux aux composantes de  $\vec{b}$ .**

- 2)  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  est linéairement indépendante car  $\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$  n'admet que la solution triviale  $\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Alors la famille  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  est une base de  $\mathbb{R}^2$  et on l'appelle la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ .

Mais il existe d'autres bases (une infinité!). Par exemple

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

En effet :

- 1) pour tout  $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ , on a

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & b_1 \\ 1 & -2 & b_2 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{2b_1+b_2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{b_1-b_2}{3} \end{array} \right)$$

Donc

$$\vec{b} = \frac{2b_1 + b_2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{b_1 - b_2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

**ICI on a que les coefficients de la combinaison linéaire ne sont pas égaux aux composantes de  $\vec{b}$ .**

2)  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$  est linéairement indépendante car ils ne sont pas colinéaires.

La famille  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$  est donc une base de  $\mathbb{R}^2$ .

**Définition 1.55** (base de  $\mathbb{R}^n$ ).

Une famille de vecteurs  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$  de  $\mathbb{R}^n$  est une *base* de  $\mathbb{R}^n$  si

- 1)  $\text{span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\} = \mathbb{R}^n$
- 2)  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$  est linéairement indépendante.

Comme c'est une base, on aura nécessairement que  $p = n$ .

*Remarque:*

- 1) si  $p > n$  :  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$  est linéairement dépendante par le Théorème 1.54.
- 2) si  $p < n$  : soit  $A = (\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \dots \ \vec{v}_p)$ . On aura que  $A$  ne possède pas un pivot par ligne, donc par le Théorème 1.38,  $\text{span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\} \neq \mathbb{R}^n$  (on aura seulement une inclusion  $\subset \mathbb{R}^n$ ).
- 3) si  $p=n$  : on ne peut rien dire sans vérifier les conditions de la définition 1.55.

## 1.8 Introduction aux applications linéaires

### Objectifs.

- définir et travailler avec des applications linéaires ;
- décrire les applications linéaires avec une matrice ;
- savoir si une application est linéaire, et savoir faire la différence entre application linéaire et application matricielle.

**But** : on veut interpréter les matrices comme des applications linéaire (ou transformations linéaires)

**Exemple 1.56.**

- 1)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  alors  $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2 : A\vec{x} = \vec{x}$ .  $A$  "ne fait rien". Elle représente l'application identité.
- 2)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  alors  $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$ .  $A$  permute les deux composantes de  $\vec{x}$ .  
 $A$  est une symétrie selon la droite de direction  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

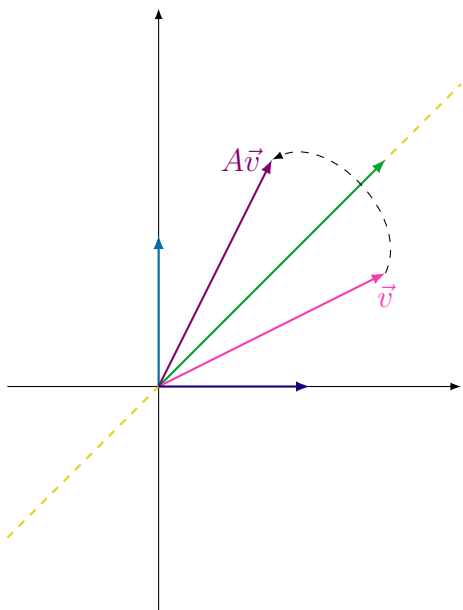


FIGURE 3 – Exemple 2)

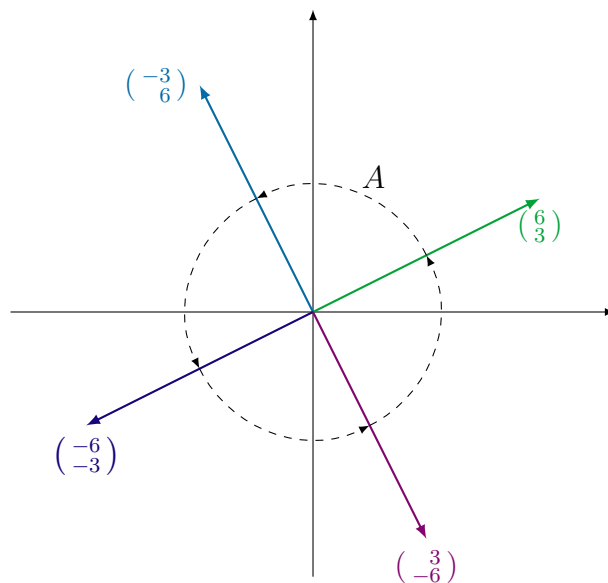


FIGURE 4 – Exemple 3)

$$3) A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

on a  $A \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ , puis  $A \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ . On voit que c'est égal à  $A(A\vec{v})$  On continue

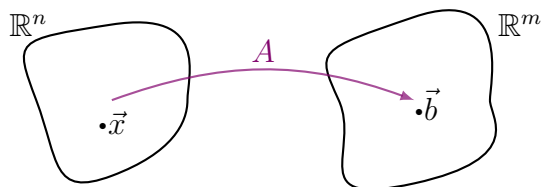
$A \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix} = A(A(A\vec{v}))$  et enfin  $A \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \vec{v}$

$A$  est une rotation de  $\frac{\pi}{2}$  ( $90^\circ$ ) dans le sens anti-horaire.

Remarque : les matrices de rotations s'écrivent  $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  pour les rotations d'angle  $\theta$  dans le sens anti-horaire.

## Généralisation

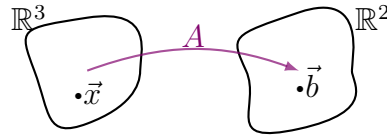
Soient  $A$  une matrice  $m \times n$ ,  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$  alors  $A\vec{x} = \vec{b}$  s'interprète comme  $A$  transforme  $\vec{x}$  en  $\vec{b}$ .



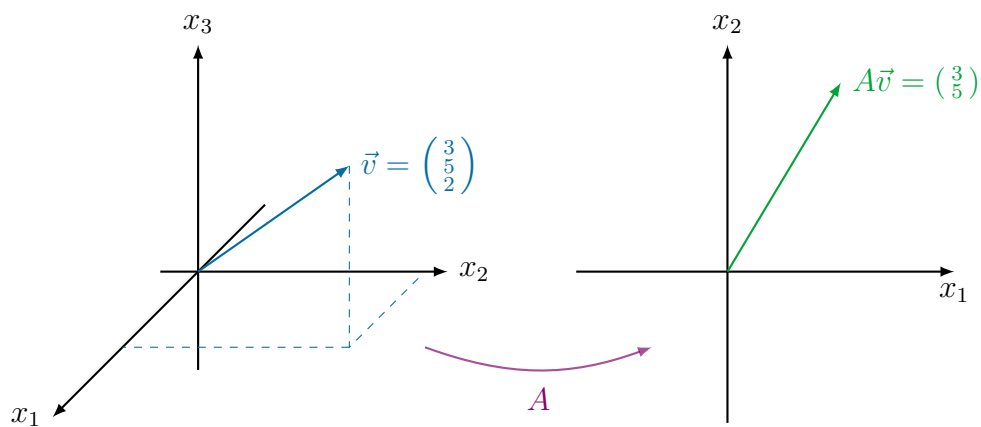
**Exemple 1.57.**

1) Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  de taille  $2 \times 3$ . On aura  $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ .

On a donc



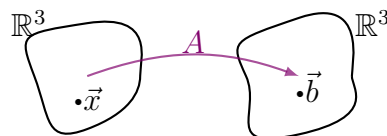
Cette application envoie un vecteur de  $\mathbb{R}^3$  sur un vecteur de  $\mathbb{R}^2$ .



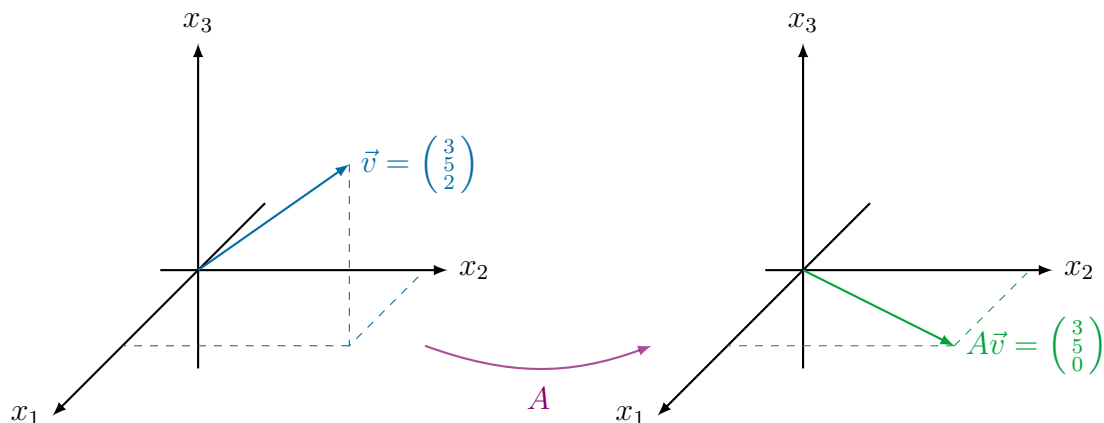
2) Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  de taille  $3 \times 3$ . On aura

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

On a donc



Cette application projette  $\vec{v}$  sur le plan  $O_{x_1x_2}$  de  $\mathbb{R}^3$ .



*Remarque:* L'application 2) n'est pas égale à l'application 1). Dans le cas de l'application 2), les images (les vecteurs obtenus) sont dans  $\mathbb{R}^3$  - même si l'image est un plan, on reste dans  $\mathbb{R}^3$ , les vecteurs ont 3 composantes - alors que dans le cas de l'application 1), on se retrouve dans  $\mathbb{R}^2$  - les images n'ont que 2 composantes. Et  $\mathbb{R}^3 \neq \mathbb{R}^2$ !

*Remarque:* Avec les deux applications de l'exemple 1.57, on aura une infinité de vecteurs envoyés sur le même vecteur (c'est-à-dire qui auront la même image). Par exemple avec l'application 2) :

$$A \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{mais } A \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ou encore } A \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 46 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Définition 1.58** (transformation/application).

Une *transformation*  $T$  de  $\mathbb{R}^n$  vers  $\mathbb{R}^m$  est une opération qui assigne à chaque vecteur de  $\mathbb{R}^n$  un vecteur de  $\mathbb{R}^m$ . On la note

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ \vec{x} &\mapsto T(\vec{x}) \end{aligned}$$

On appelle  $\mathbb{R}^n$  l'ensemble de départ, et  $\mathbb{R}^m$  l'ensemble d'arrivée. Pour  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $T(\vec{x})$  est l'image de  $\vec{x}$  par  $T$ . L'ensemble de toutes les images s'appelle l'image de  $T$ , notée  $\text{Im}(T)$ . On aura  $\text{Im}(T) \subseteq \mathbb{R}^m$ .

*Remarque:* On aimerait décrire l'application  $T$  avec une matrice et avoir

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ \vec{x} &\mapsto A\vec{x} \end{aligned}$$

On va d'abord commencer par la situation où on connaît  $A$ . Attention ça n sera pas toujours le cas, des fois il faudra trouver  $A$ .

**Exemple 1.59.**

1)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $T$  associée à  $A$  :

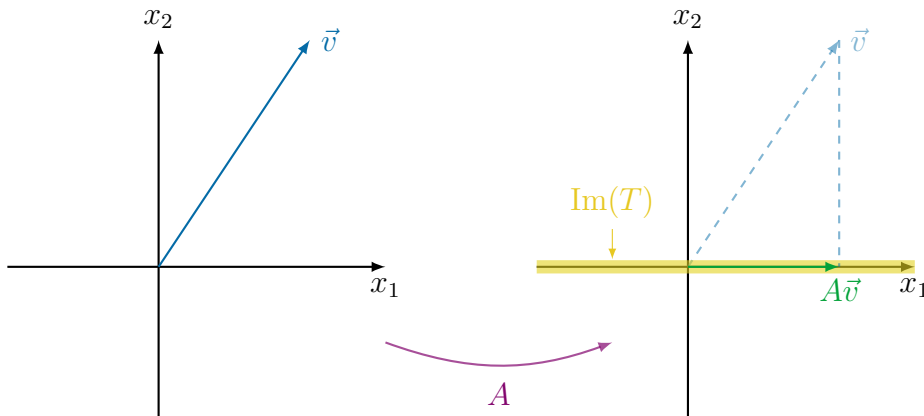
$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \vec{x} &\mapsto A\vec{x} \end{aligned}$$

On a que  $\mathbb{R}^3$  est l'ensemble de départ,  $\mathbb{R}^2$  celui d'arrivée, et  $\text{Im}(T) = \mathbb{R}^2$ . Ici l'image de  $T$  est égal à l'ensemble d'arrivée.

2)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $T$  associée à  $A$  :

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \vec{x} \mapsto A\vec{x}$$

On a  $A\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\mathbb{R}^2$  est l'ensemble de départ ainsi que celui d'arrivée. On a  $\text{Im}(T)$  qui est égale à l'axe  $O_{x_1}$  (l'axe  $x_1$ ). Ici l'image de  $T$  n'est pas égal à l'ensemble d'arrivée.



*Remarque:* Dans la définition 1.58 il n'y a pas de mention d'une matrice associée à la transformation. Il n'y a pas non plus de mention de la linéarité de  $T$ . On peut en effet avoir des transformation linéaires, ou non-linéaires. On peut aussi avoir des transformations avec une matrice associées, ou sans. Par exemple  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  qui envoie  $x$  sur  $T(x) = x^2$  est une transformation, mais elle n'est pas linéaire.

Avec les propriétés algébriques de  $\mathbb{R}^n$  1.4 et la multiplication matrice-vecteur on peut montrer que

$$A(\lambda\vec{u} + \vec{v}) = \lambda A\vec{u} + A\vec{v}, \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

**Définition 1.60** (transformation linéaire).

Une transformation  $T$  est *linéaire* si

- 1)  $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$
- 2)  $T(\lambda\vec{u}) = \lambda T(\vec{u})$

pour tous  $\vec{u}, \vec{v}$  dans l'ensemble de départ de  $T$  et pour tous  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

S'il existe  $A$  telle que  $T(\vec{u}) = A\vec{u}$  on dira que  $T$  est une *transformation matricielle*. Si  $T$  est matricielle alors par 1, on a que  $T$  est linéaire, car  $T$  vérifiera la définition 1.60.

On a donc

$T$  une transformation matricielle  $\Rightarrow T$  est une transformation linéaire.

Mais

$T$  une transformation linéaire  $\not\Rightarrow T$  est une transformation matricielle.

Par exemple l'application "dérivée" est linéaire mais pas matricielle.

## Conséquences

Soit  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  linéaire.

i)  $T(\vec{0}) = \vec{0}$

ii)  $T(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = T(\lambda\vec{u}) + T(\mu\vec{v}) = \lambda T(\vec{u}) + \mu T(\vec{v})$

On peut généraliser

$$T(\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \dots + \lambda_p\vec{u}_p) = \sum_{i=1}^p \lambda_i T(\vec{u}_i), \quad p \in \mathbb{N}^*$$

On appelle cela le principe de superposition.

### Exemple 1.61.

Soient  $r \in \mathbb{R}$ ,  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  où  $T(\vec{x}) = r\vec{x}$ .

Est-ce que  $T$  est linéaire ?

$$\begin{aligned} T(\lambda\vec{u} + \vec{v}) &= r(\lambda\vec{u} + \vec{v}) \\ &= r\lambda\vec{u} + r\vec{v} \\ &= \lambda r\vec{u} + r\vec{v} \\ &= \lambda T(\vec{u}) + T(\vec{v}) \end{aligned}$$

oui elle est linéaire.

Cherchons  $A$  une matrice telle que  $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ . Comme  $T(\vec{x}) = A\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow$ ,  $A$  est de taille  $2 \times 2$ .

On a  $T(\vec{x}) = r\vec{x} = r \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \vec{x}$ .

Donc  $A = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$ .

Par exemple, si  $r = 3 : T(\vec{u}) = 3\vec{u}$ ,  $T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ . Il s'agit d'une homothétie de rapport 3.

*Remarque:* si  $0 < r < 1$  on appelle cela une contraction, si  $r > 1$  on appelle cela une dilatation.

## 1.9 Matrice associée à une transformation linéaire

**But** trouver  $A$  (si c'est possible) telle que  $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ .

Prenons  $\mathbb{R}^2$  et essayons de trouver  $A$  associée à une application linéaire.

Soit  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  et soient  $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . On sait que

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 \tag{2}$$

avec  $x_1 = 1^{\text{ère}}$  composante de  $\vec{x} =$  coeff de  $\vec{e}_1$  dans la combinaison linéaire 2

et  $x_2 = 2^{\text{ème}}$  composante de  $\vec{x} =$  coeff de  $\vec{e}_2$  dans la combinaison linéaire 2.

$\Rightarrow$  on obtient un ordre.

Il faudra respecter l'ordre des composantes et l'ordre des vecteurs dans la base choisie.

Quand on devra respecter l'ordre on notera la base avec des parenthèses  $(\dots, \dots)$ .

Par exemple  $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  pour la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ .

Quand on a pas besoin de l'ordre on utilise les accolades :  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ .

*Remarque:* On a déjà utilisé les deux notations dans le cours :  $(\dots, \dots)$  et  $\{\dots, \dots\}$ .

Pour les listes ordonnées comme les solutions de systèmes d'équations linéaires on a utilisé les parenthèses  $S = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ . Ici nous avons besoin d'un ordre dans les  $s_i$  car ils s'agit de substituer les  $s_i$  dans des équations.

Mais, pour les spans on n'a pas besoin d'ordre dans les éléments entre les accolades :

$$\text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

**Exemple 1.62.**

Soit  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  linéaire. Supposons qu'on connaisse

$$T(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ et } T(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Donc dans cet exemple, nous ne connaissons pas  $A$ , et on n'a pas vraiment une expression pour  $T$ . On aura  $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ , donc  $A$  sera de taille  $3 \times 2$ . Par 2 on a

$$\begin{aligned} T(\vec{x}) &= T(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2) = x_1T(\vec{e}_1) + x_2T(\vec{e}_2) \\ &= x_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_1 + x_2 \\ 5x_1 + 3x_2 \\ 6x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

On a donc trouvé comment écrire  $T$  et son action sur les vecteurs de  $\mathbb{R}^2$

$$T(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -2x_1 + x_2 \\ 5x_1 + 3x_2 \\ 6x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$$

Or ceci s'écrit aussi

$$T(\vec{x}) = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A\vec{x}$$

On a alors que

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = (T(\vec{e}_1) \quad T(\vec{e}_2))$$

**Théorème 1.63.** Soit  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  une transformation linéaire. Alors il existe une matrice  $A$  de taille  $m \times n$  unique, telle que  $T(\vec{x}) = A\vec{x}, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$  et elle est donnée par

$$A = (T(\vec{e}_1) \quad T(\vec{e}_2) \quad \cdots \quad T(\vec{e}_n))$$

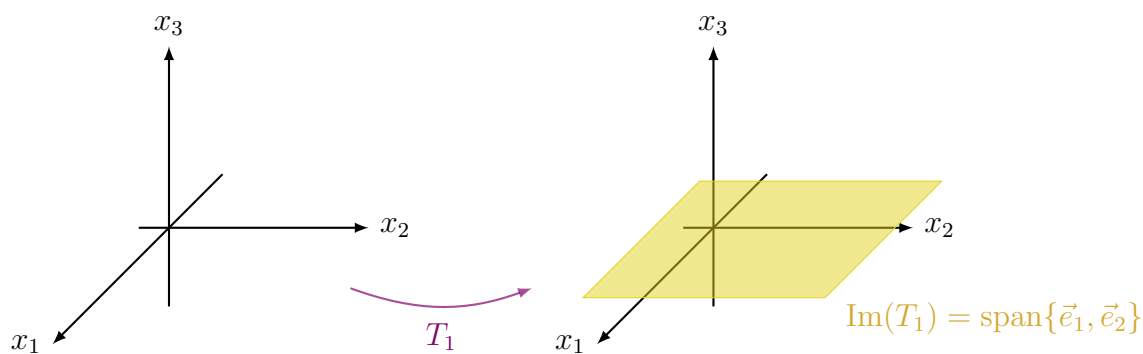
où  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . La matrice  $A$  est de taille  $m \times n$  et s'appelle la matrice canoniquement associée à  $T$ .

*Démonstration.* voir le cours. □

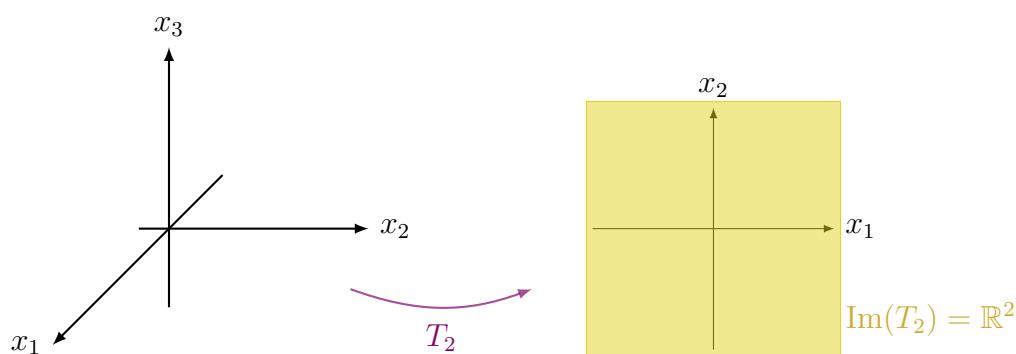
## Transformations injectives et surjectives

### Exemple 1.64.

1) Soit  $T_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  donnée par  $T_1(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

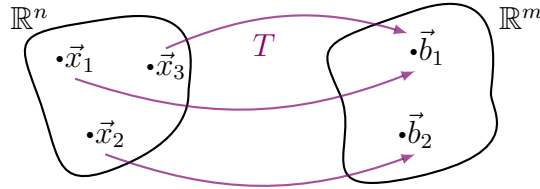


2) Soit  $T_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  donnée par  $T_2(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ .



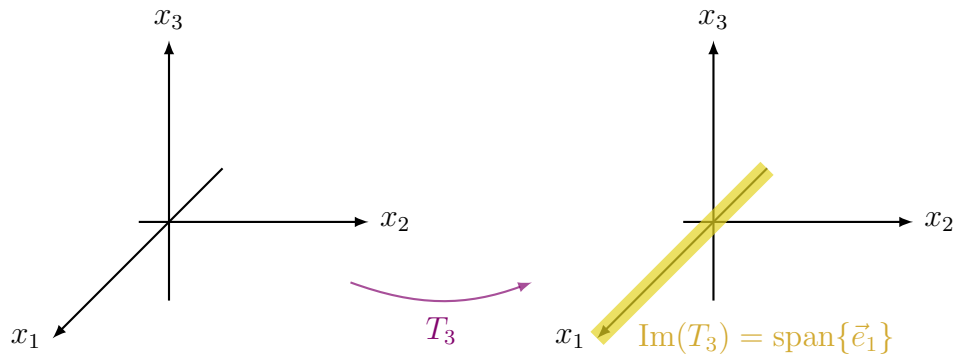
**Définition 1.65** (surjective).

Une transformation linéaire  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  est dite *surjective* si tout vecteur  $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$  (ensemble d'arrivée) est l'image d'au moins un vecteur de  $\mathbb{R}^n$  (ensemble de départ).

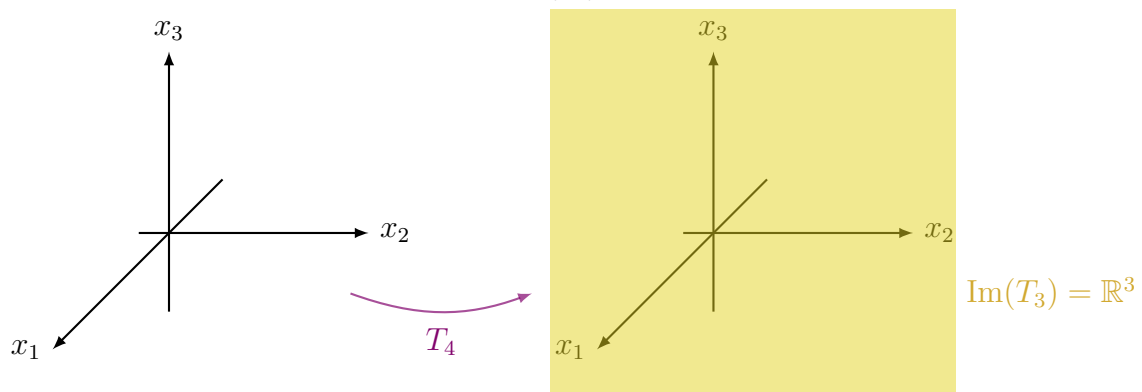


**Suite de l'exemple 1.64**

3) Soit  $T_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  donnée par  $T_1(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

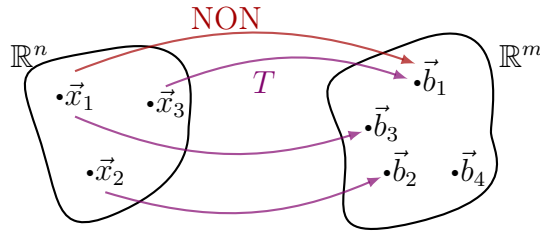


4) Soit  $T_4 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  donnée par  $T_2(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$ .



**Définition 1.66** (injective).

Une transformation linéaire  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  est dite *injective* si tout vecteur  $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$  est l'image d'au plus un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ .



Remarque:

- 1)  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  est surjective si et seulement si  $\text{Im}(T) = \mathbb{R}^m$ .
- 2)  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  est injective si et seulement si  $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^m$ , l'équation  $T(\vec{x}) = \vec{b}$  admet au plus une solution  
si et seulement si  $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\vec{x} \neq \vec{y}$  on a  $T(\vec{x}) \neq T(\vec{y})$ .

**Définition 1.67** (bijective).

Soit  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  une application linéaire, alors si  $T$  est injective et surjective, elle est bijective.

Le théorème suivant est à associer au Théorème 1.38.

**Théorème 1.68.** Soient  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  une transformation linéaire et  $A$  la matrice canoniquement associée :  $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ . Alors les énoncés suivants sont équivalents

1.  $T$  est surjective
2.  $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^m$ ,  $\vec{b}$  est une combinaison linéaire des colonnes de  $A$ .
3. chaque ligne de  $A$  possède 1 pivot.

Remarque: On aura que  $A$  est de taille  $m \times n$ . Supposons que  $A = (\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \dots \ \vec{a}_n)$  où  $\vec{a}_i \in \mathbb{R}^m$  est la colonne  $i$  de  $A$ .

- i)  $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^m$ ,  $\vec{b}$  est une combinaison linéaire des colonnes de  $A \iff \forall \vec{b} \in \mathbb{R}^m$  il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  tels que :  $\vec{b} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n$   
 $\iff \text{span}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\} = \mathbb{R}^m$ . (ici il s'agit de  $\mathbb{R}^m$ )
- ii) on a aussi  $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^m$ ,  $\vec{b}$  est une combinaison linéaire des colonnes de  $A \iff \text{Im}(T) = \mathbb{R}^m$ .

$$\text{Im}(A) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

Mais peut-on "mieux décrire"  $\text{Im}(A)$ ? est-ce que  $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$  est une base de  $\text{Im}(A)$ ?

$$A \sim \dots \sim \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 0 & -2 \\ 0 & \textcircled{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \text{les colonnes ne sont pas lin. indép.}$$

On a que  $-2\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{a}_3$ . Donc

$$\text{Im}(A) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \quad \vec{a}_3 \text{ est superflu}$$

et  $\text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\} = \text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ .

**Théorème 1.69.** Soit  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  une transformation linéaire. Alors  $T$  est injective si et seulement si  $T(\vec{x}) = \vec{0}$  n'admet que la solution triviale.

*Démonstration.* voir le cours. □

**Exemple 1.70.**

Soit  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  une application linéaire, donnée par

$$T(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 \\ 5x_1 + 2x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

On va chercher  $A$  telle que  $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ .

Comme  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , on sait que  $A$  sera de taille  $3 \times 2$ . De plus, par le Théorème 1.63  $A$  est donnée par

$$A = (T(\vec{e}_1) \quad T(\vec{e}_2)) = \left( T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Est-ce que  $T$  est surjective? Par le Théorème 1.68,  $T$  est surjective  $\iff A$  possède 1 pivot par ligne. Mais  $A$  ne peut pas avoir 1 pivot par ligne car elle n'a que 2 colonnes. Ceci implique que  $T$  n'est pas surjective

$$A \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Est-ce que  $T$  est injective? on utilise le Théorème 1.69 :  $T$  inj  $\iff T(\vec{x}) = \vec{0}$  n'admet que  $\vec{0}$  comme solution

$\iff A\vec{x} = \vec{0}$  n'admet que  $\vec{0}$  comme solution

$\iff$  les colonnes de  $A$  sont linéairement indépendantes (par le Théorème 1.50)

$\iff A$  possède 1 pivot par colonnes.

Dans notre cas c'est vrai, donc  $T$  est injective.

## Noyau et image d'une application

**Définition 1.71** (Noyau et image).

Soit  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  est une application linéaire.

Le *noyau* de  $T$ , noté  $\text{Ker}(T)$ , est l'ensemble des vecteurs  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  tels que  $T(\vec{x}) = \vec{0}$ . On le note

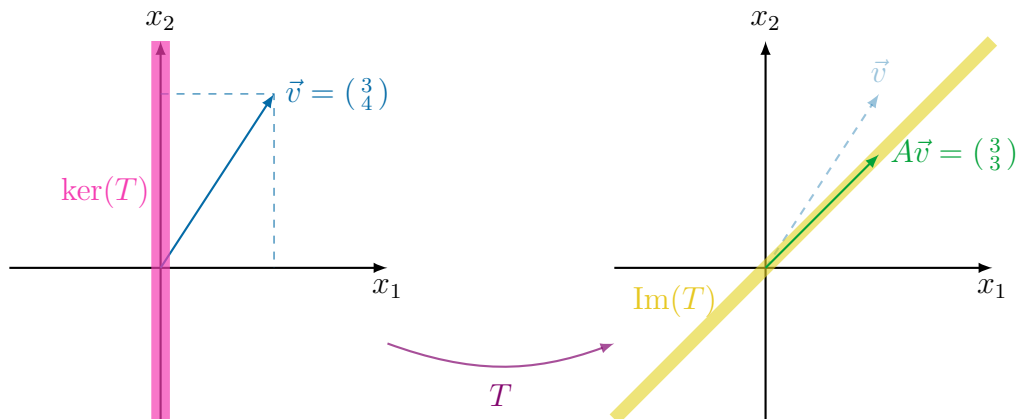
$$\text{Ker}(T) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid T(\vec{x}) = \vec{0} \} \subseteq \mathbb{R}^n$$

L'*image* de  $T$  est définie par

$$\text{Im}(T) = \{ \vec{b} \in \mathbb{R}^m \mid \exists \vec{x} \in \mathbb{R}^n : T(\vec{x}) = \vec{b} \} \subseteq \mathbb{R}^m$$

**Exemple 1.72.**

1) Soit  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  donnée par  $T(\vec{x}) = A\vec{x}$  avec  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  On a  $A\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}$



On cherche le noyau de  $T$  :

$$\begin{aligned} T(\vec{x}) = \vec{0} &\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff x_1 = 0 \text{ et } x_2 \text{ est libre} \\ &\iff \vec{s} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Donc  $\text{Ker}(T) = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \} = \text{span}\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$ . Cherchons maintenant l'image de  $T$ . Il s'agit de l'ensemble des  $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$  tels que  $T(\vec{x}) = \vec{b}$  est compatible.

$$\begin{aligned} &\iff \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & b_1 \\ 1 & 0 & b_2 \end{array} \right) \text{ soit compatible} \\ &\iff \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & b_2 - b_1 \end{array} \right) \text{ soit compatible} \\ &\iff b_1 = b_2 \end{aligned}$$

Donc

$$\text{Im}(T) = \{ \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \} = \text{span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

2) Soit  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  donnée par  $T(\vec{x}) = A\vec{x}$  avec  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Trouver le noyau  $\text{Ker}(T)$  et l'image  $\text{Im}(T)$ .

## Chapitre 2 : Calcul Matriciel

### Objectifs.

- définir les opérations matricielles ;
- transposer une matrice ;
- définir des matrices symétriques, antisymétriques et diagonales ;
- inverser des matrices ;
- travailler avec des matrices par blocs.

### 2.1 Opérations matricielles

Soient  $A, B$  des matrices de taille  $m \times n$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Somme**

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Multiplication par un scalaire**

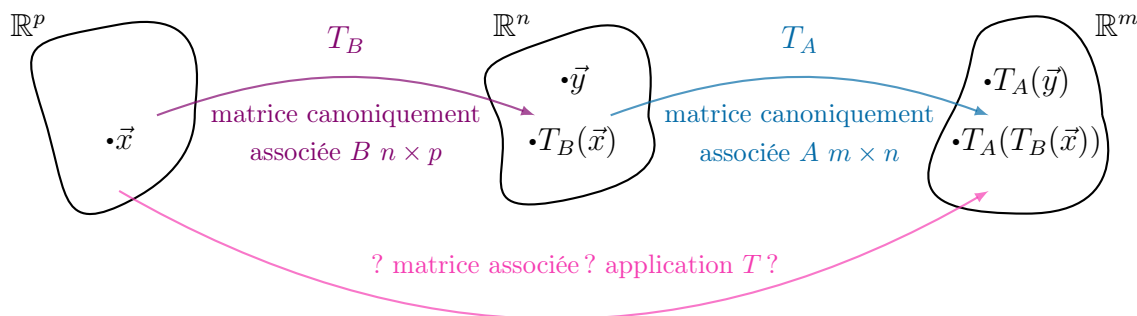
$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

**Théorème 2.1.** Soient  $A, B$  et  $C$  des matrices  $m \times n$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . On a

1.  $A + B = B + A$
2.  $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$
3.  $A + \mathcal{O}_{m \times n} = A$  où  $\mathcal{O}_{m \times n}$  est la matrice nulle de taille  $m \times n$
4.  $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
5.  $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
6.  $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$
7.  $1A = A$
8.  $0A = \mathcal{O}_{m \times n}$

## Multiplication matricielle

On a vu comment multiplier des vecteurs et des matrices, maintenant on va voir comment multiplier des matrices entre elles. La multiplication "matrice-vecteur" vient des applications (voir le chapitre 1). La multiplication "matrice-matrice" vient des compositions d'applications.



Soit  $\vec{x} \in \mathbb{R}^p$ , on a  $T_B(\vec{x}) \in \mathbb{R}^n$  et  $T_B(\vec{x}) = B\vec{x}$ .

Donc  $T_A(T_B(\vec{x})) = T_A(B\vec{x}) = A(B\vec{x}) \in \mathbb{R}^m$

On a que  $A(B\vec{x})$  est une composition d'applications  $T_A, T_B$ . On peut écrire

$$A(B\vec{x}) = (AB)\vec{x}$$

**Définition 2.2** (Produit matriciel).

Soient  $A$  une matrice de taille  $m \times n$  et  $B$  une matrice de taille  $n \times p$ . Le produit matriciel  $AB$  est défini par

$$AB = \left( A\vec{b}_1 \quad A\vec{b}_2 \quad \cdots \quad A\vec{b}_p \right)$$

$AB$  est une matrice de taille  $m \times p$ .

*Remarque:* On a

nombre de colonne de  $A$  = nombre de lignes de  $B$

**Exemple 2.3.**

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

On a

$$\begin{aligned} AB &= \left( \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## "Règle ligne-colonne"

Soient  $A$  de taille  $m \times n$  et  $B$  de taille  $n \times p$  alors la matrice  $C = AB$  est définie par

$$c_{ij} = (a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$$

**Exemple 2.4.**

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) & 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \\ 0 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) & 0 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 0 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

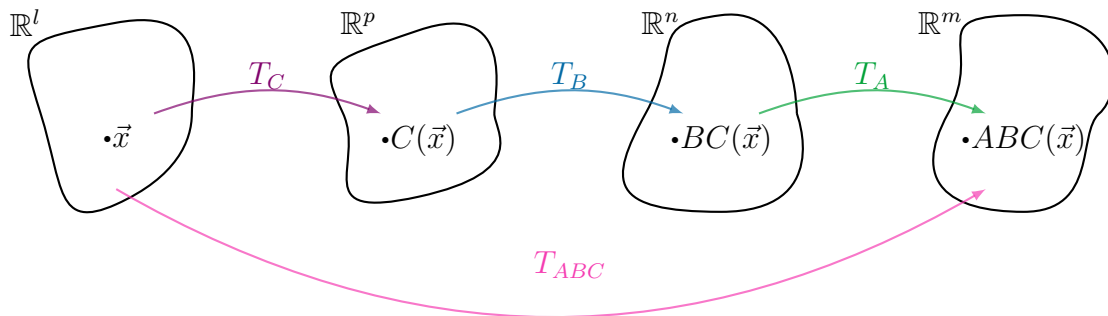
*Remarque:* On appelle *matrice identité* la matrice carrée avec des 1 sur la diagonale et des 0 partout ailleurs. La matrice identité de taille  $n \times n$  est notée  $I_n$  et vaut

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Théorème 2.5.** Soient  $A$  une matrice  $m \times n$  et  $B$  et  $C$  des matrices telles que les produits ci-dessous soient définis. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On a

1.  $A(BC) = (AB)C = ABC$
2.  $A(B + C) = AB + AC$
3.  $(A + B)C = AC + BC$
4.  $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$
5.  $A = AI_n$  et  $A = I_m A$  où  $I_n$  est la matrice identité de taille  $n \times n$  et  $I_m$  de taille  $m \times m$ .

## Composition d'applications



$$T_{ABC}(\vec{x}) = A \begin{matrix} B \\ C \end{matrix} \begin{matrix} \vec{x} \\ \in \mathbb{R}^l \\ \in \mathbb{R}^p \\ \in \mathbb{R}^n \end{matrix} \in \mathbb{R}^m$$

Pour pouvoir faire les multiplications, la matrice  $A$  doit être de taille  $m \times n$ , la matrice  $B$  doit être de taille  $n \times p$  et la matrice  $C$  de taille  $p \times l$ .

*Remarque:*

- 1) Le produit matriciel n'est pas commutatif, c'est-à-dire  $AB \neq BA$  (en général).
- 2)  $AB$  peut être défini mais  $BA$  pas. En effet on peut avoir l'existence du produit  $AB$  mais pas l'existence de  $BA$ .
- 3) Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $ab = 0$  on aura  $a = 0$  ou  $b = 0$  (ou les deux). Mais cela n'est plus valable pour le produit matriciel. On peut avoir  $AB = \mathcal{O}$  ( $\mathcal{O}$  la matrice nulle) avec  $A$  ou  $B$  (ou le deux) non-nulles.
- 4) Soient  $a, b, c \in \mathbb{R} : a \neq 0$ , tels que  $ab = ac$ . Alors on aura  $b = c$ . Mais cela n'est plus valable pour le produit matriciel. On peut avoir  $AB = AC$  sans avoir  $B = C$ .

**Définition 2.6** (transposée).

Soit  $A$  une matrice  $m \times n$ . Sa transposée, notée  $A^\top$  est la matrice de taille  $n \times m$  dont les colonnes sont les lignes de  $A$ .

**Exemple 2.7.**

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} \text{ et } A^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2) A = (1 \ 2 \ 7 \ 0) \text{ et } A^\top = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Théorème 2.8.** Soient  $A$  et  $B$  des matrices telles que  $AB$  existe. Alors

1.  $(A^\top)^\top = A$
2.  $(A + B)^\top = A^\top + B^\top$
3. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $(\lambda A)^\top = \lambda A^\top$
4.  $(AB)^\top = B^\top A^\top$

**Exemple 2.9.**

Soient  $A, B$  données par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On aura

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad (AB)^\top = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

De l'autre côté on a

$$A^\top = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$B^\top A^\top = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

On a donc  $B^\top A^\top = (AB)^\top$ , alors que  $A^\top B^\top$  n'existe pas.

**Exemple 2.10.**

Sous quelles conditions avons-nous  $A = A^\top$ ? Il faut tout d'abord que  $A$  soit carrée, donc de taille  $n \times n$ .

- 1)  $A = (a)$ , on aura  $A^\top = A$ .
- 2)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , on aura  $A^\top = A$ .
- 3)  $A = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ , on aura  $A^\top = A$ .
- 4)  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  on aura  $A^\top \neq A$ .

**Définition 2.11** (symétrique, antisymétrique).

Soit  $A$  une matrice. Alors

$A$  est symétrique si  $A$  est  $n \times n$  et si  $A^\top = A : a_{ij} = a_{ji}$

$A$  est antisymétrique si  $A$  est  $n \times n$  et si  $A^\top = -A : a_{ij} = -a_{ji}$

*Remarque:* Les composantes sur la diagonale de  $A$ , les  $a_{ii}$ , sont fixes. Ils ne bougent pas dans la transposée. Donc :

- 1) si  $A$  est symétrique,  $a_{ii}$  ne changent pas.
- 2) si  $A$  est antisymétrique, on a  $a_{ij} = -a_{ji}$  par définition, donc  $a_{ii} = -a_{ii}$ . Or la seule possibilité dans  $\mathbb{R}$  est que  $a_{ii} = 0$ . On aura donc que chaque matrice antisymétrique possède uniquement des 0 sur la diagonale.

**Exemple 2.12.**

- 1)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$  est symétrique, mais pas antisymétrique.
- 2)  $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$  est antisymétrique, mais pas symétrique.
- 3)  $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$  n'est ni symétrique, ni antisymétrique.
- 4) la matrice nulle est symétrique et antisymétrique.

**Théorème 2.13.** *Toute matrice  $A$  de taille  $n \times n$  est la somme d'une matrice symétrique et anti-symétrique.*

*Démonstration.* voir le cours. On montre que  $A = \frac{1}{2}(A + A^\top) + \frac{1}{2}(A - A^\top)$ , avec  $\frac{1}{2}(A + A^\top)$  une matrice symétrique et  $\frac{1}{2}(A - A^\top)$  une matrice antisymétrique.  $\square$

**Exemple 2.14.**

- 1)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$  On a

$$\frac{1}{2}(A + A^\top) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}(A - A^\top) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a bien que  $\frac{1}{2}(A + A^\top)$  est symétrique et  $\frac{1}{2}(A - A^\top)$  est antisymétrique. De plus  $A = \frac{1}{2}(A + A^\top) + \frac{1}{2}(A - A^\top)$ .

- 2)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ .  $A$  est une matrice antisymétrique. Mais on peut quand même appliquer le théorème :

$$\frac{1}{2}(A + A^\top) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ qui est symétrique}$$

$$\frac{1}{2}(A - A^\top) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ qui est antisymétrique (c'est la matrice } A)$$

## Puissances de matrices

Soit  $A$  une matrice  $n \times n$ , et soit  $k \in \mathbb{N}$  alors on peut définir le produit  $A^k$

$$A^k = \underbrace{AAA \cdots A}_{k \text{ occurrences de } A}$$

Si  $k = 0$  on a  $A^0 = I_n$ .

### Exemple 2.15.

1)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ . On a  $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$ ,  $A^4 = \begin{pmatrix} 199 & 290 \\ 435 & 634 \end{pmatrix}$ . Les calculs deviennent compliqués.

2)  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ . On a  $A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $A^3 = \begin{pmatrix} 27 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ . On a finalement  $A^k = \begin{pmatrix} 3^k & 0 \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}$

*Remarque:* Pour les matrices diagonales  $A = (a_{ii})$  on aura  $A^k = (a_{ii}^k)$ , qui reste une matrice diagonale. Les coefficients sur la diagonale sont élevés à la puissance  $k$ , les autres restent nuls.

*Remarque:* On peut utiliser une notation simplifiée pour les matrices diagonales

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

## 2.2 Inverse d'une matrice

Dans  $\mathbb{R}$  : trouvons  $x$  tel que  $7x = 30$ , on a  $x = \frac{30}{7}$

On divise 30 par 7 ou multiplie 30 par  $\frac{1}{7}$

De plus on dit que  $\frac{1}{7}$  est l'inverse de 7 et on a :

$$\frac{1}{7} \cdot 7 = 1 = 7 \cdot \frac{1}{7}$$

Mais est-ce qu'on peut faire un raisonnement similaire avec les matrices ? Supposons que  $A\vec{x} = \vec{b}$ .

On ne peut pas diviser par  $A$ ... Cela ne fait pas de sens : en effet  $\vec{x} = \frac{\vec{b}}{A}$  **ne veut rien dire**

Comme  $\frac{1}{A}$  n'a pas de sens, on ne peut pas dire que c'est l'inverse de  $A$ . On doit trouver une autre manière de définir l'inverse, car  $\frac{1}{A}$  n'a pas de sens et n'est pas défini.

Soit  $r \in \mathbb{R}^*$

$$\frac{1}{r} \cdot r = r \cdot \frac{1}{r} = 1$$

On dira que  $\frac{1}{r}$  est l'inverse de  $r$ . On le note  $r^{(-1)} = \frac{1}{r}$ .

Soit  $A$  une matrice

On cherche  $A^{-1}$  une matrice telle que

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$$

Pour que les deux produits soient égaux et existent on doit avoir  $A$  carrée

$\implies A$  est  $n \times n$ .

**Définition 2.16** (inverse).

Soit  $A$  une matrice  $n \times n$ . Alors elle est *inversible* s'il existe  $B$  de taille  $n \times n$  telle que

$$AB = BA = I_n$$

L'inverse est unique, on la note  $A^{-1}$ . Si  $A$  n'est pas inversible, on dira que  $A$  est *singulière* (ou *non-inversible*).

*Remarque:* Les matrices  $m \times n$ , avec  $m \neq n$  ne sont pas inversibles. Une matrice carrée  $n \times n$  peut être inversible, comme elle peut être non-inversible. Pour les matrices non-inversibles, il existe des pseudo-inverses. On ne parlera pas de cela dans ce cours.

**Exemple 2.17.**

1)  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . On veut résoudre  $AA^{-1} = I_2$ .

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} 2a - c = 1 \\ 2b - d = 0 \\ a + c = 0 \\ b + d = 1 \end{cases}$$

$$\text{On obtient } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . On a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} a + c = 1 \\ b + d = 0 \\ a + c = 0 \\ b + d = 1 \end{cases}$$

Ceci nous donne  $a = -c \implies -c + c = 1 \implies 0 = 1$  Le système est inconsistant, donc  $A$  est singulière.

## Formule pour une matrice $2 \times 2$

**Théorème 2.18.** Soit  $A$  une matrice  $2 \times 2$ ,  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Alors si  $ad - bc \neq 0$  on a

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

On appelle  $ad - bc$ , le déterminant de  $A$ , noté  $\det(A)$  (voir le chapitre 3).

**Exemple 2.19.**

1)  $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $\det(A) = 26 \neq 0$ . Donc la matrice est inversible, on a

$$A^{-1} = \frac{1}{26} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

2)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\det(A) = 1 - 1 = 0$ . La matrice est singulière.

## Une utilité de l'inverse

**Théorème 2.20.** Soit  $A$  une matrice  $n \times n$ . Si  $A$  est inversible, alors pour tous  $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ ,  $A\vec{x} = \vec{b}$  admet une unique solution donnée par  $A^{-1}\vec{b}$ .

**Exemple 2.21.**

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, A^{-1} = \frac{1}{26} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Soit  $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ . La solution de  $A\vec{x} = \vec{b}$  est

$$\vec{s} = \frac{1}{26} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{26} \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Soit } \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \text{ on aura } \vec{s} = \frac{1}{26} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{26} \begin{pmatrix} -2 \\ -31 \end{pmatrix}$$

**Théorème 2.22.** Soient  $A, B$  des matrices  $n \times n$  inversibles. Alors

1.  $A^{-1}$  est inversible et  $(A^{-1})^{-1} = A$
2.  $AB$  est inversible et  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
3.  $A^\top$  est inversible et  $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$

## Matrices élémentaires

On va utiliser les opérations élémentaires pour calculer l'inverse de  $A$ .

**Définition 2.23** (matrice élémentaire).

Une matrice  $E$  est dite *élémentaire* si elle s'obtient par une seule opération élémentaire sur les lignes de  $I_n$ .  $E$  est une matrice carrée de taille  $n \times n$ .

**Exemple 2.24.**

Regardons les trois types de matrices élémentaires de taille  $3 \times 3$ . On part donc de  $I_3$ .

Type I :  $L_i \leftrightarrow L_j$ . Par exemple :  $L_2 \leftrightarrow L_3$ . On a

$$E_{\text{I}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Type II :  $L_i \leftarrow \alpha L_i$ ,  $\alpha \neq 0$ . Par exemple :  $L_2 \leftarrow -3L_2$ . On a

$$E_{\text{II}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Type III :  $L_i \leftarrow L_i + \mu L_j$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ . Par exemple :  $L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{2}L_3$ . On a

$$E_{\text{III}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mais  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  n'est pas une matrice élémentaire, car elle s'obtient avec deux opérations élémentaires :  $L_2 \leftarrow -2L_2$  et  $L_1 \leftarrow L_1 + L_3$ .

## Résumé

Les matrices élémentaires sont  $n \times n$ , elles sont inversibles et on peut les utiliser pour trouver l'inverse d'une matrice (si l'inverse existe).

Mais on a une autre utilité qui n'est pas liée aux inverses.

Soit  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$  qui est de taille  $3 \times 4$ .

Soit l'opération élémentaire  $L_2 \leftrightarrow L_3$  (type I)

$$A \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix} = A'. \quad A' \text{ est de taille } 3 \times 4$$

On peut écrire  $A'$  comme un produit matriciel de  $A$  avec une matrice élémentaire  $E_I$  de type I.

Question : doit-on prendre  $AE_I = A'$  ou  $E_I A = A'$ ?

$A'$  s'obtient en faisant une opération élémentaire sur les lignes de  $A$ . On a 3 lignes dans  $A$ , et  $E_I$  "agit" sur les lignes de  $A$ . Elle sera  $3 \times 3$ .

Ici

$$E_I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et  $E_I A = A'$ .

Constat : multiplier par la gauche ( $E_I A$ ) modifie les lignes de  $A$ .

On verra plus loin que  $AE_I$  (multiplication par la droite) modifie les colonnes de  $A$ .

**Théorème 2.25.** *Soit  $A$  une matrice  $m \times n$ . Si  $E$  est une matrice élémentaire obtenue de  $I_m$  avec une seule opération élémentaire. On a que  $EA$  est une matrice  $m \times n$  qui s'obtient de  $A$  avec la même opération élémentaire.*

### Exemple 2.26.

Soit  $A$  donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Soit  $L_2 \leftarrow (-2)L_2$ .

La matrice élémentaire est  $E_{II} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $E_{II}A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  (2ème ligne de  $A$  qui est mult. par  $-2$ .)

Par contre  $AE_{II} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & -8 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

Constat : Une multiplication par la droite modifie les colonnes (2ème colonne de  $A$  qui est multipliée par  $-2$ )

**Théorème 2.27.** *Les matrices élémentaires sont inversibles et leurs inverses sont aussi des matrices élémentaires.*

### Algorithme pour trouver $A^{-1}$

Soit  $A$   $n \times n$  une matrice inversible. On a  $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ .  
La matrice  $I_n$  est donnée par

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \dots \quad \vec{e}_n)$$

On cherche la matrice inverse,  $A^{-1}$  (notre inconnue), on pose alors

$$A^{-1} = (\vec{x}_1 \vec{x}_2 \dots \vec{x}_n)$$

et on cherche  $\vec{x}_i \in \mathbb{R}^n$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ .

On a, d'après la définition de la multiplication des matrices :

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= A(\vec{x}_1 \vec{x}_2 \dots \vec{x}_n) \\ &= A(\vec{x}_1 \vec{x}_2 \dots \vec{x}_n) = (A\vec{x}_1 \quad A\vec{x}_2 \dots A\vec{x}_n) \end{aligned}$$

On doit alors résoudre  $(A\vec{x}_1 \quad A\vec{x}_2 \dots A\vec{x}_n) = (\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \dots \vec{e}_n)$ .

C'est-à-dire  $n$  équations :  $A\vec{x}_i = \vec{e}_i, i = 1, \dots, n$ . On utilisera l'algorithme de Gauss-Jordan.

Or on sait que  $A$  est inversible, donc  $A\vec{x}_i = \vec{e}_i$  admet

une unique solution, donc la matrice  $A$  possède  $n$  pivots (il n'y a pas de variables libres)

On aura  $A \sim I_n$  et  $I_n$  est la forme échelonnée-réduite de  $A$ .

On a

$$(A|\vec{e}_i) \sim \dots \sim (I_n|\vec{x}_i)$$

Avec  $\vec{x}_i$  l'unique solution. Comme on devra résoudre  $n$  fois un système similaire (seuls les termes de droite changent), on peut le faire une seule fois. Pour cela on met tous les termes de droites

$$(A|\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \dots \quad \vec{e}_n) \sim \dots \sim (I_n|\vec{x}_1 \quad \vec{x}_2 \quad \dots \quad \vec{x}_n)$$

Ce qui est équivalent à

$$(A|I_n) \sim \dots \sim (I_n|A^{-1})$$

*Remarque:* Si on n'obtient pas  $I_n$  dans la partie gauche de la dernière équation, la matrice  $A$  ne sera pas inversible. On verra plus tard des critères pour savoir si  $A$  est inversible.

**Exemple 2.28.**

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  une matrice inversible. Trouvons son inverse.

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc|ccc} \textcircled{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) & \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left( \begin{array}{ccc|ccc} \textcircled{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} \textcircled{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 2 & -2 & 1 \end{array} \right) \sim (I_3|A^{-1}) \end{aligned}$$

Les deux opérations effectuées correspondent à deux matrices élémentaires, qu'on indicera avec 1 et 2 pour première et deuxième opération élémentaire respectivement :

$$\text{Pour la première opération } L_2 \leftarrow L_2 - L_1 : E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Pour la deuxième opération } L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 : E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

On a  $E_2 E_1 A = I_3$ ,  $A = (E_2 E_1)^{-1} I_3$  et  $E_2 E_1 I_3 = A^{-1}$ .

**Théorème 2.29.** *Soit  $A$  une matrice  $n \times n$ . Alors  $A$  est inversible si et seulement si on peut passer de  $A$  à  $I_n$  avec l'algorithme de Gauss-Jordan. Dans ce cas, toutes suites d'opérations élémentaires qui transforment  $A$  en  $I_n$  transformeront  $I_n$  en  $A^{-1}$ .*

Le prochain théorème reprend plusieurs résultats déjà vu dans le cours.

**Théorème 2.30.** *Soit  $A$  une matrice de taille  $n \times n$ . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1.  $A$  est inversible
2.  $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ ,  $A\vec{x} = \vec{b}$  admet une solution unique donnée par  $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$
3. les colonnes de  $A$ ,  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ , engendrent  $\mathbb{R}^n$  :  $\text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\} = \mathbb{R}^n$
4.  $A$  possède un pivot par ligne (et donc aussi un pivot par colonne)
5. les lignes de  $A$  sont linéairement indépendantes
6.  $A\vec{x} = \vec{0}$  n'admet que la solution triviale
7. on peut passer de  $A$  à  $I_n$  avec l'algorithme de Gauss-Jordan :  $A \sim \dots \sim I_n$
8.  $A$  est un produit de matrices élémentaires
9. l'application linéaire  $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$  est surjective
10. l'application linéaire  $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$  est injective
11.  $A^\top$  est inversible

## 2.3 Matrices par blocs

But voir les matrices comme une collection ou liste de sous-matrices

$$A = \left( \begin{array}{ccc|cc|cc} 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 7 & 1 & 2 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \hline A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{array} \right)$$

où  $A_{11} : 1 \times 3$ ,  $A_{12} : 1 \times 2$ ,  $A_{13} : 1 \times 2$ ,  $A_{21} : 2 \times 3$  sont des sous-matrices.

On dira que  $A$  est de taille  $3 \times 7$ , ou  $2 \times 3$  par blocs.

### Addition et multiplication par un scalaire

Soient  $A$  et  $B$  des matrices  $m \times n$  organisées en blocs de la même façon, on définit l'addition par

$$\begin{aligned} A + B &= \left( \begin{array}{c|c|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \hline A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c|c|c} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ \hline B_{21} & B_{22} & B_{23} \end{array} \right) \\ &= \left( \begin{array}{c|c|c} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & A_{13} + B_{13} \\ \hline A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} & A_{23} + B_{23} \end{array} \right) \end{aligned}$$

ici  $A_{ij}$  et  $B_{ij}$  sont de la même taille.

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda A = \left( \begin{array}{c|c|c} \lambda A_{11} & \lambda A_{12} & \lambda A_{13} \\ \hline \lambda A_{21} & \lambda A_{22} & \lambda A_{23} \end{array} \right)$$

### Produit de deux matrices par blocs

Soient  $A$  une matrice  $m \times n$  et  $B$  une matrice  $n \times p$ , des matrices par blocs, définies par

$$A = \left( \begin{array}{c|c|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \hline A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{array} \right) \quad B = \left( \begin{array}{c} B_{11} \\ B_{21} \\ B_{31} \end{array} \right)$$

Alors le produit  $AB$  est une matrice  $m \times p$  définie par

$$AB = \left( \begin{array}{c} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} + A_{13}B_{31} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} + A_{23}B_{31} \end{array} \right)$$

Le produit  $AB$  est une matrice  $2 \times 1$  par blocs.

#### Exemple 2.31.

Soient  $A$  et  $B$  données par

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On a  $A_{11}B_{11} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

$A_{13}B_{31} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$  On calcule chaque produit entre les sous-matrices et on obtient

$$AB = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 6 \\ -6 & 8 & 6 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le produit  $AB$  est une matrice  $3 \times 3$  ou  $2 \times 1$  par blocs.

## Cas particuliers

### Partition par colonnes

Ici chaque bloc est une colonne de la matrice.

$$A = \left( \begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right) = (\vec{a}_1 \mid \vec{a}_2 \mid \dots \mid \vec{a}_n) = (col_1(A) \mid col_2(A) \mid \dots \mid col_n(A))$$

### Partition par lignes

Ici chaque bloc est une ligne de la matrice

$$A = \left( \begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \hline \vdots & & & \vdots \\ \hline a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} lgn_1(A) \\ \hline lgn_2(A) \\ \hline \vdots \\ \hline lgn_m(A) \end{array} \right)$$

On dira que  $A$  est partitionné en  $n$  colonnes ou en  $m$  lignes.

On peut alors écrire le produit matriciel de plusieurs façons. Soient  $A$  une matrice  $m \times n$  et  $B$  une matrice  $n \times p$ .

$$1) AB = A(\vec{b}_1 \mid \vec{b}_2 \mid \dots \mid \vec{b}_p) = (A\vec{b}_1 \mid A\vec{b}_2 \mid \dots \mid A\vec{b}_p)$$

2) Supposons que  $A$  ait une décomposition par blocs-lignes et  $B$  en blocs-colonnes

$$A = \left( \begin{array}{c} lgn_1(A) \\ \hline lgn_2(A) \\ \hline \vdots \\ \hline lgn_m(A) \end{array} \right) \quad \text{et} \quad B = (\vec{b}_1 \mid \vec{b}_2 \mid \dots \mid \vec{b}_p)$$

On a

$$AB = \begin{pmatrix} \text{lg}n_1(A)\vec{b}_1 & \text{lg}n_1(A)\vec{b}_2 & \cdots & \text{lg}n_1(A)\vec{b}_p \\ \vdots & & & \vdots \\ \text{lg}n_m(A)\vec{b}_1 & \text{lg}n_m(A)\vec{b}_2 & \cdots & \text{lg}n_m(A)\vec{b}_p \end{pmatrix}$$

comme  $\text{lg}n_i(A)\vec{b}_j \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$  et  $j = 1, \dots, n$ , le produit  $AB$  n'est pas partitionné en blocs. En effet

$$\text{lg}n_1(A)\vec{b}_1 = (a_{11} \ a_{12} \ \cdots \ a_{1n}) \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} \in \mathbb{R}$$

3) Supposons que  $A$  ait une décomposition par blocs-colonne et  $B$  en blocs-lignes

$$A = (\vec{a}_1 \mid \vec{a}_2 \mid \cdots \mid \vec{a}_n) \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} \text{lg}n_1(B) \\ \text{lg}n_2(B) \\ \vdots \\ \text{lg}n_n(B) \end{pmatrix}$$

On a

$$AB = \vec{a}_1 \text{lg}n_1(B) + \vec{a}_2 \text{lg}n_2(B) + \cdots + \vec{a}_n \text{lg}n_n(B)$$

avec  $\vec{a}_i \text{lg}n_i(B)$  une matrice de taille  $m \times p$ ,  $i = 1, \dots, n$ . En effet

$$\vec{a}_1 \text{lg}n_1(B) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} (b_{11} \ b_{21} \ \cdots \ b_{1p}) = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \cdots & a_{11}b_{1p} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1}b_{11} & \cdots & \cdots & a_{m1}b_{1p} \end{pmatrix}$$

qui est une matrice de taille  $m \times p$ .

*Remarque:* Le produit est le même, mais des fois le produit hérite de la partition des matrices, des fois pas.

## Matrices triangulaires, diagonale et triangulaires par blocs

**Définition 2.32** (triangulaire supérieure et inférieure (par blocs)).

Une matrice  $n \times n$  est dite

- 1) triangulaire sup si  $a_{ij} = 0, \forall j < i$  :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- 2) triangulaire sup par blocs si  $A_{ij} = 0, \forall j < i$  :

$$A = \left( \begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & A_{22} \end{array} \right)$$

- 3) triangulaire inf si  $a_{ij} = 0, \forall j > i$  :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- 4) triangulaire inf par blocs si  $A_{ij} = 0, \forall j > i$  :

$$A = \left( \begin{array}{c|c} A_{11} & 0 \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right)$$

- 5) diagonale si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- 6) diagonale par blocs

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_{nn} \end{pmatrix}$$

## Inverse des matrices triangulaires par bloc

On donne l'inverse pour une matrice  $2 \times 2$  par blocs.

Soit

$$A = \left( \begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & A_{22} \end{array} \right)$$

On suppose que  $A$  est inversible :  $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ . De plus on aura que  $A^{-1}$  admet la même partition que  $A$  :

$$A^{-1} = \left( \begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array} \right)$$

On a

$$AA^{-1} = \left( \begin{array}{c|c} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ \hline A_{22}B_{21} & A_{22}B_{22} \end{array} \right)$$

On partitionne  $I_n$  de la même manière (en  $2 \times 2$  par blocs)

$$I_n = \left( \begin{array}{c|c} I_{n_1} & 0 \\ \hline 0 & I_{n_2} \end{array} \right)$$

et on aura des égalités blocs par blocs, ce qui donne un système de quatre équations

$$\begin{cases} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & = I_{n_1} & (1.1) \\ A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} & = 0_{n_1 \times n_2} & (1.2) \\ A_{22}B_{21} & = 0_{n_2 \times n_1} & (1.3) \\ A_{22}B_{22} & = I_{n_2} & (1.4) \end{cases}$$

De (1.4), on a  $A_{22}$  inversible et  $B_{22} = A_{22}^{-1}$ .

De (1.3) : on obtient  $A_{22}^{-1}A_{22}B_{21} = A_{22}^{-1}0_{n_2 \times n_1}$  car  $A_{22}$  est inversible. On obtient  $B_{21} = 0_{n_2 \times n_1}$ .

De (1.1) : on a  $A_{12}B_{21} = 0_{n_1 \times n_1}$ , donc  $A_{11}B_{11} = I_{n_1}$ , ainsi  $B_{11} = A_{11}^{-1}$ .

De (1.2) : comme  $A_{11}$  est inversible et  $B_{22} = A_{22}^{-1}$  on a

$$A_{11}^{-1}A_{11}B_{12} + A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} = A_{11}^{-1}0_{n_1 \times n_2}$$

Et on obtient

$$B_{12} = -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}$$

**Théorème 2.33.** *Soit  $A$  une matrice  $n \times n$  triangulaire supérieure par blocs. Si  $A_{11}$  et  $A_{22}$  sont inversibles, alors  $A$  est inversible et*

$$A^{-1} = \left( \begin{array}{c|c} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ \hline 0 & A_{22}^{-1} \end{array} \right)$$

# Chapitre 3 : Le déterminant

## Objectifs.

- calculer les déterminants ;
- utiliser le déterminant comme critère d'inversion ;
- connaître et utiliser les propriétés du déterminant

On rappelle qu'on a, par le Théorème 2.18 que  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  inversible si et seulement si  $\det(A) \neq 0$ , avec  $\det(A) = ad - bc$ .

## 3.1 Introduction

Calculons  $\det(A)$  pour une matrice  $A$  de taille  $3 \times 3$  :  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$  On va faire apparaître des déterminants  $2 \times 2$ , et pour cela on choisit de faire le développement à partir de la première ligne de  $A$ .

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \det(A_{11}) - a_{12} \det(A_{12}) + a_{13} \det(A_{13})$$

**Définition 3.1** (matrice des cofacteurs).

Soit  $A$  une matrice  $n \times n$ . On appelle  $A_{1j}$  la *matrice des cofacteurs* de  $A$  par rapport à la première ligne et  $j$ -ème colonne d  $A_{1j}$  s'obtient en éliminant la première ligne et la  $j$ -ème colonne de  $A$ .

Formule pour une matrice  $4 \times 4$  : on procède par rapport à la première ligne (c'est un choix qu'on fait pour le moment)

$$A = \begin{pmatrix} + & - & + & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ +a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ -a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = a_{11} \det(A_{11}) - a_{12} \det(A_{12}) + a_{13} \det(A_{13}) - a_{14} \det(A_{14})$$

Il y a une alternance de signes.

## Généralisation aux matrices $n \times n$

### Définition 3.2 (déterminant).

On appelle *application déterminant*, l'application qui associe à toute matrice  $n \times n$  un nombre. Ce nombre s'appelle le *déterminant*. On a

- 1) pour une matrice  $1 \times 1$  :  $\det((a)) = a$
- 2) pour une matrice  $2 \times 2$ ,  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  :  $\det(A) = ad - bc$ .
- 3) pour  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  une matrice  $n \times n$  : en choisissant de calculer le déterminant par rapport à la **première ligne** :

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + a_{13}|A_{13}| - a_{14}|A_{14}| + \dots (-1)^{1+n}a_{1n}|A_{1n}| \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} |A_{1j}| \end{aligned}$$

Si on choisit une autre ligne, par exemple la ligne  $k$ , on remplace les **1** par  $k$ .

### Exemple 3.3.

Soit  $A$  donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On va calculer le déterminant par rapport à la **première ligne** :

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{1+1}(1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}(2) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}(-3) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 1 + 6 = 7 \end{aligned}$$

Faisons le développement par rapport à la **deuxième ligne** :

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{2+1}(2) \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}(1) \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}(1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (-2)(3) + 0 - (1) = 7 \end{aligned}$$

Faisons le développement par rapport à la **troisième ligne** :

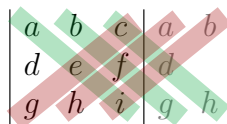
$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{3+1}(0) \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}(-1) \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}(0) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 0 + 1(1 + 6) + 0 = 7 \end{aligned}$$

*Remarque:* On préfère prendre la ligne avec le plus de zéros.

## Calcul rapide pour les $3 \times 3$ : la règle de Sarrus

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = +aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg$$

On peut illustrer la règle de la manière suivante, en considérant des "diagonales". Malheureusement cela ne fonctionne que pour des matrices  $3 \times 3$ .



**Définition 3.4** (cofacteur).

Le *cofacteur* est le nombre défini par

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$$

où  $A_{ij}$  est la matrice des cofacteurs. Le déterminant peut alors s'écrire, avec un développement par rapport à la première ligne

$$\det(A) = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + \dots + a_{1n}c_{1n}$$

**Théorème 3.5.** *Le déterminant d'une matrice  $A$  de taille  $n \times n$  peut être calculé par un développement*

1. Selon la ligne  $i$  de  $A$

$$\det(A) = a_{i1}c_{i1} + a_{i2}c_{i2} + \dots + a_{in}c_{in}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

2. Selon la colonne  $j$  de  $A$

$$\det(A) = a_{1j}c_{1j} + a_{2j}c_{2j} + \dots + a_{nj}c_{nj}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

## Cas particuliers

1) Le déterminant d'une matrice  $A$ , diagonale, est donné par le produit des éléments sur la diagonales (les  $a_{ii}$ ). On a

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} \dots a_{nn}$$

2) Le déterminant d'une matrice  $A$ , triangulaire supérieure (inférieure), est donné par le produit des éléments sur la diagonales (les  $a_{ii}$ ). Par exemple, on a

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} \dots a_{nn}$$

### 3.2 Propriétés des déterminants

Dans cette section on essaiera de simplifier les calculs du déterminant, en échelonnant la matrice  $A$ . On rappelle qu'échelonner la matrice  $A$  revient à multiplier  $A$ , par la gauche, par des matrices élémentaires. Soit  $A$  une matrice  $3 \times 3$  donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$


On a  $\det(A) = 2$ . Regardons l'influence qu'a, sur le déterminant de  $A$ , une multiplication par la gauche par une matrice élémentaire. On a trois types de matrices élémentaires.

Type I :  $L_i \leftrightarrow L_j$ . Par exemple  $L_1 \leftrightarrow L_2$ .

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_{12}} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = E_{12}A$$

On a  $\det(E_{12}A) = -2$  et  $\det(E_{12}) = -1$ . Ceci nous donne la relation

$$\det(A) = 2 \qquad \det(E_{12}A) = -2$$


$\cdot(-1) = \cdot \det(E_{12})$ 



Type II :  $L_i \leftarrow \alpha L_i$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ . Par exemple  $L_2 \leftrightarrow 3L_2$ .

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_2(3)} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = E_2(3)A$$

On a  $\det(E_2(3)A) = 6$  et  $\det(E_2(3)) = 3$ . Ceci nous donne la relation

$$\det(A) = 2 \qquad \det(E_2(3)A) = 6$$

$\cdot 3 = \cdot \det(E_2(3))$ 


$\cdot \frac{1}{3} = \cdot \frac{1}{\det(E_2(3))}$ 


Type III :  $L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ . Par exemple  $L_1 \leftrightarrow L_1 + 3L_2$ .

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_{12}(3)} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = E_{12}(3)A$$

On a  $\det(E_{12}(3)A) = 2$  et  $\det(E_{12}(3)) = 1$ . Ceci nous donne la relation

$$\begin{array}{ccc} & \cdot 1 = \cdot \det(E_{12}(3)) & \\ & \frown & \searrow \\ \det(A) = 2 & & \det(E_{12}(3)A) = 2 \end{array}$$

**Théorème 3.6.** Soient  $A$  une matrice  $n \times n$  et  $E$  une matrice élémentaire obtenue à partir de  $I_n$ . Alors

$$\det(EA) = \det(E) \det(A) \quad \text{et} \quad \det(A) = \frac{\det(EA)}{\det(E)}$$

où

$$\det(E) = \begin{cases} -1 & \text{si } E \text{ est de type I} \\ \alpha & \text{si } E \text{ est de type II} \\ 1 & \text{si } E \text{ est de type III} \end{cases}$$

**Théorème 3.7.** Soient  $A$  et  $B$  deux matrices  $n \times n$  alors

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

Remarque: On a par contre

$$\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$$

### Notations et résumé

Type I	$L_i \leftrightarrow L_j$	$E_{ij}$	$\det(E_{ij}) = -1$
Type II	$L_i \leftarrow \alpha L_i$	$E_i(\alpha)$	$\det(E_i(\alpha)) = \alpha$
Type III	$L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$	$E_{ij}(\alpha)$	$\det(E_{ij}(\alpha)) = 1$

**Exemple 3.8.**

Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 8 & 4 \\ -1 & 0 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 6 & -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ . On va échelonner  $A$ . Divisons la ligne 1 de  $A$  par 2, pour faire apparaître un pivot en première composante de  $A$ .

$$E_1\left(\frac{1}{2}\right)A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 6 & -2 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E_1\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Par le théorème 3.6, on a

$$\det(A) = \frac{\det(E_1\left(\frac{1}{2}\right)A)}{\det(E_1\left(\frac{1}{2}\right))} = 2 \det(E_1\left(\frac{1}{2}\right)A)$$

Ceci nous donne

$$\det(A) = 2 \begin{vmatrix} \textcircled{1} & -3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 6 & -2 & 0 & 7 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{On va faire trois opérations du type III} \\ \text{pour mettre des zéros dessous notre pivot} \\ \text{cela ne change pas le déterminant} \end{array}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} \textcircled{1} & -3 & 4 & 2 \\ 0 & \textcircled{-3} & 9 & 0 \\ 0 & 10 & -10 & -4 \\ 0 & 16 & -24 & -5 \end{vmatrix} \quad \text{Faisons } L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2 \text{ le det restant est mutliplié par } -3$$

$$= 2(-3) \begin{vmatrix} \textcircled{1} & -3 & 4 & 2 \\ 0 & \textcircled{1} & -3 & 0 \\ 0 & 10 & -10 & -4 \\ 0 & 16 & -24 & -5 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{On va faire deux opérations du type III} \\ \text{pour mettre des zéros dessous notre pivot en colonne 2} \\ \text{cela ne change pas le det de } A \end{array}$$

$$= 2(-3) \begin{vmatrix} \textcircled{1} & -3 & 4 & 2 \\ 0 & \textcircled{1} & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{20} & -4 \\ 0 & 0 & 24 & -5 \end{vmatrix} \quad \text{Faisons } L_3 \leftarrow \frac{1}{20}L_3 \text{ le det restant est mutliplié par } 20$$

$$= 2(-3)20 \begin{vmatrix} \textcircled{1} & -3 & 4 & 2 \\ 0 & \textcircled{1} & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 24 & -5 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{On va faire une opération du type III} \\ \text{pour mettre un zéro dessous notre pivot en colonne 3} \\ \text{cela ne change pas le det de } A \end{array}$$

$$= 2(-3)20 \begin{vmatrix} \textcircled{1} & -3 & 4 & 2 \\ 0 & \textcircled{1} & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} \end{vmatrix} \quad \text{Onaobtenuunematricetriangulairesup}$$

$$= 2(-3)20 \frac{-1}{5} = 24$$

## Stratégies pour calculer le déterminant

1. prendre une ligne ou colonne avec beaucoup de zéros
2. échelonner  $A$  un petit peu pour rendre les calculs plus simples :  $A \sim \dots \sim U$  où  $U$  est une forme échelonnée de  $A$  ou alors une matrice "intermédiaire" sympathique. Supposons qu'on ait fait  $p$  opérations élémentaires et appelons les matrices élémentaires  $E_i$ , pour la matrice élémentaire correspondantes à l'opération  $i$  : on a

$$E_p E_{p-1} \dots E_2 E_1 A = U$$

Et le déterminant de  $A$  est donné par

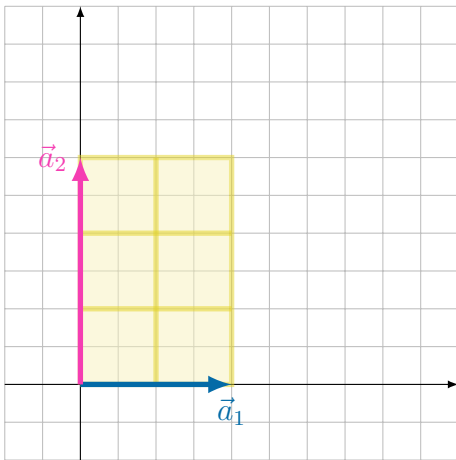
$$\det(A) = \frac{\det(U)}{\det(E_p) \det(E_{p-1}) \cdots \det(E_2) \det(E_1)}$$

**Théorème 3.9.** Soit  $A$  une matrice  $n \times n$  alors

1.  $\det(A) = \det(A^\top)$
2.  $A$  est inversible si et seulement si  $\det(A) \neq 0$ .

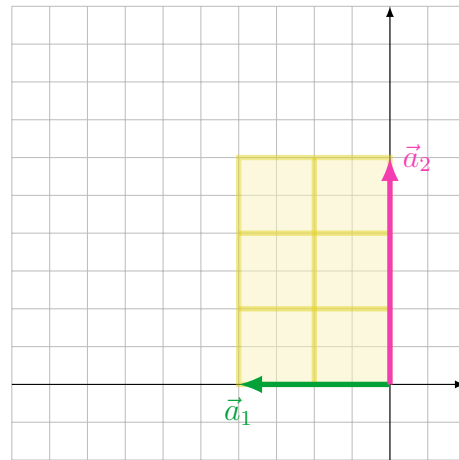
### 3.3 Interprétation géométrique du déterminant

Dans  $\mathbb{R}^2$



$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = (\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2)$$

$\det(A) = 6 = \text{aire du rectangle jaune}$



$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = (\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2)$$

$\det(A) = -6 \neq \text{aire du rectangle jaune}$

**Théorème 3.10.**

1. Si  $A$  est  $2 \times 2$  alors  $|\det(A)|$  donne l'aire du parallélogramme délimité par les colonnes de  $A$ .
2. Si  $A$  est  $3 \times 3$  alors  $|\det(A)|$  donne le volume du parallélépipède délimité par les colonnes de  $A$ .

## Chapitre 4 : Espaces vectoriels

### Objectifs.

- définir les espaces vectoriels et les notions associées ;
- trouver la matrice associée à une application linéaire ;
- utiliser l'application coordonnée

### Définition 4.1 (espace vectoriel).

On appelle *espace vectoriel* un ensemble non-vide  $V$  composé d'éléments sur lesquels on définit une opération d'addition et une opération de multiplication par un scalaire. On les note

$$\begin{array}{lcl} + : V \times V & \rightarrow & V \\ (u, v) & \mapsto & u + v \end{array} \quad \begin{array}{lcl} \cdot : \mathbb{R} \times V & \rightarrow & V \\ (\lambda, v) & \mapsto & \lambda v \end{array}$$

On appelle *vecteurs* les éléments de  $V$  on lrd note  $v \in V$ . Si  $V = \mathbb{R}^n$  on notera  $\vec{v}$  comme dans le Chapitre 1.

*Remarque:*  $V \times W$  est le produit cartésien

$$V \times W := \{(v, w) | v \in V, w \in W\}$$

Les opérations  $+$  et  $\cdot$  vérifient les 10 axiomes ci-dessous.

Soient  $u, v, w \in V$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

- 1)  $u + v \in V$  (stable pour l'addition)
- 2)  $u + v = v + u$
- 3)  $(u + v) + w = u + (v + w)$
- 4) il existe un élément de  $V$ , noté  $0_V$  tel que  $u + 0_V = u$ ,  $0_V$  est l'élément neutre pour l'addition
- 5) pour tout  $v \in V$ , il existe un élément inverse pour l'addition, noté  $-v$ , tel que  $v + (-v) = 0_V$
- 6)  $\lambda v \in V$  (stable pour la multiplication par un scalaire)
- 7)  $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$
- 8)  $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$
- 9)  $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$
- 10)  $1u = u$ ,  $1$  est l'élément neutre pour la multiplication par scalaire

## Propriétés

P1)  $0_V$  est unique

P2) l'élément inverse de  $v$  pour l'addition,  $-v$ , est unique

P3)  $0v = 0_V$  (ici  $0 \in \mathbb{R}$ )

P4)  $\lambda 0_V = 0_V$

P5)  $(-1)v = -v$

### Exemple 4.2.

- 1)  $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \dots, \mathbb{R}^n$  sont des espaces vectoriels.
- 2) l'ensemble des fonctions est un espace vectoriel
- 3)  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  est un espace-vectoriel
- 4) l'ensemble des polynômes de degré au plus  $n$  est un espace vectoriel. On le note

$$\mathbb{P}_n = \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n \mid a_i \in \mathbb{R}\}$$

Par exemple, dans  $\mathbb{P}_2 = \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \mid a_i \in \mathbb{R}\}$  on trouve

(a)  $1 + t + t^2$

(b)  $1 - 2t + \frac{1}{2}t^2$

(c)  $-3 + 4t^2$

(d)  $-4 - t$  est un polynôme de degré 1, il appartient à  $\mathbb{P}_1$ , et aussi à  $\mathbb{P}_2, \mathbb{P}_3$  etc.

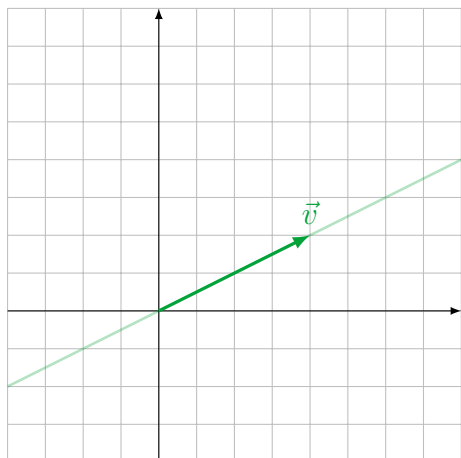
On a alors un inclusion entre les espaces des polynômes

$$\mathbb{P}_1 \subset \mathbb{P}_2 \subset \mathbb{P}_3 \subset \dots$$

Par contre  $1 + t - t^2 + t^3 \notin \mathbb{P}_2$  car c'est un polynôme de degré 3.

## 4.1 Sous-espace vectoriel

Prenons  $V = \mathbb{R}^2$  et soit  $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ , on a  $\text{span}\{\vec{v}\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^2$ . Quelles sont les conditions pour avoir un sous-espace vectoriel ? On a



- 1)  $\vec{0} \in \text{span}\{\vec{v}\}$
- 2) soient  $\vec{u}, \vec{w} \in \text{span}\{\vec{v}\}$  on a  $\vec{u} + \vec{w} \in \text{span}\{\vec{v}\}$
- 3) soit  $\vec{u} \in \text{span}\{\vec{v}\}$  on a  $\lambda\vec{u} \in \text{span}\{\vec{v}\}$ , pour tous  $\lambda \in \mathbb{R}$

En effet  $\vec{u} = \alpha\vec{v}$ ,  $\vec{w} = \beta\vec{v}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , on a

$$\vec{u} + \vec{w} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v} = (\alpha + \beta)\vec{v} \in \text{span}\{\vec{v}\}$$

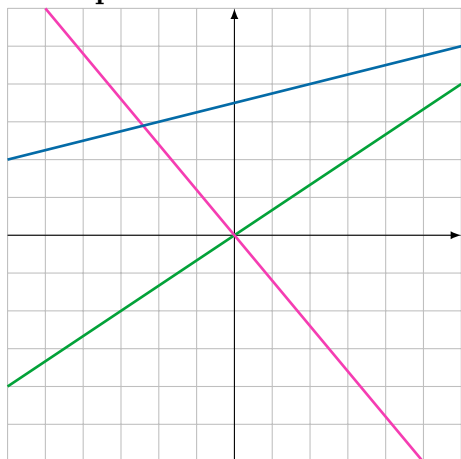
On peut faire de même pour  $\lambda\vec{u} \in \text{span}\{\vec{v}\}$

**Définition 4.3** (sous-espace vectoriel).

Soit  $V$  un espace vectoriel (EV). On appelle *sous-espace vectoriel* une partie  $W$  de  $V$  telle que

1.  $0_V \in W$
2. pour tous  $u, v \in W : u + v \in W$  (stable sous l'addition)
3. pour tous  $u \in W, \lambda \in \mathbb{R} : \lambda u \in W$  (stable sous la multiplication par scalaire)

**Exemple 4.4.**



La **droite bleue** n'est pas un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^2$ . Les deux autres droites sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^2$ . En effet la **droite bleue** ne contient pas  $\vec{0}$ , elle ne passe pas par l'origine. De plus, comme les vecteurs (dans ce cours) partent de l'origine pour aller à un point de  $\mathbb{R}^2$ , les axiomes 2. et 3. de la définition 4.3 ne sont pas non-plus vérifiés.

*Remarque:* Par la définition 4.3, un sous-espace vectoriel  $W$  est aussi un espace vectoriel. Avec les trois axiome de la définition d'un sous-espace vectoriel, on peut montrer les 10 axiomes de la définition d'un espace vectoriel 4.1. Donc

$$\text{être un sous-espace vectoriel} \Rightarrow \text{être un espace vectoriel}$$

Mais on a aussi qu'un espace vectoriel est aussi un sous-espace vectoriel de lui même. Car un espace vectoriel  $V$  vérifie aussi la définition 4.3.

On garde quand même les deux définitions car on aura souvent besoin de la notion d'inclusion entre les espaces vectoriel. En effet "être un sous-espace vectoriel" implique être inclu dans un espace vectoriel. On aura un espace vectoriel qui contient un autre espace vectoriel.

**Exemple 4.5.**

1. Soit  $\vec{u} \in \mathbb{R}^2, \vec{u} \neq \vec{0}$ , on a  $\text{span}\{\vec{u}\} \subset \mathbb{R}^2$ . On a que  $\text{span}\{\vec{u}\}$  est une droite de  $\mathbb{R}^2$ , c'est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^2$ .
2. Soient  $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3, \vec{v}, \vec{w} \neq \vec{0}$   $\text{span}\{\vec{v}, \vec{w}\} \subset \mathbb{R}^3$ . On a que  $\text{span}\{\vec{v}, \vec{w}\}$  est un plan de  $\mathbb{R}^3$ , c'est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .

Mais on a aussi que  $\text{span}\{\vec{u}\}$  et  $\text{span}\{\vec{v}, \vec{w}\}$  sont des espaces vectoriels. Par contre quand on les regarde comme espaces vectoriels, on risque de perdre l'information qu'ils sont contenus dans un autre espace vectoriel (dans  $\mathbb{R}^n$  c'est peut-être encore clair, mais quand on généralise on pourrait perdre des informations).

**Exemple 4.6.**

- 1) Soit  $\mathbb{P} = \{p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots \mid a_i \in \mathbb{R}\}$  l'ensemble des polynômes. Il y a plusieurs manières de montrer cela
  - i)  $\mathbb{P}$  est un EV, on montre les 10 axiomes
  - ii)  $\mathbb{P}_n$  est un sous-EV de  $\mathbb{P}$ , on montre les 3 axiomes
  - iii)  $\mathbb{P}_n$  est un EV. On peut montrer cela avec les 3 axiomes (au lieu des 10) En effet  $\mathbb{P}_n$  est inclus dans  $\mathbb{P}$  et  $\mathbb{P}$  est un EV. Comme  $\mathbb{P}_n$  est un sous-EV de  $\mathbb{P}$ , par la remarque précédente,  $\mathbb{P}_n$  est un EV.

On a que  $\mathbb{P}_n$  est inclus dans  $\mathbb{P}$ , on a une inclusion, une notion de structure entre les espaces vectoriels.

- 2) Soit  $V$  un EV. Alors  $\{0_V\}$  est un sous-EV de  $V$ , c'est le plus petit sous-EV de  $V$ . Mais  $\{u\}, u \neq 0_V$  n'est pas un sous-EV car  $0_V \notin \{u\}$ .

- 3)  $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0, a, b, c \neq 0 \right\}$ .  $W$  est un plan de  $\mathbb{R}^3$ . On montre que

$W$  est un sous-EV de  $\mathbb{R}^3$ .

1.  $\mathbf{0} \in W$  :  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$  car  $a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 = 0$

2.  $\vec{u} + \vec{v} \in W$ , pour  $\vec{u}, \vec{v} \in W$  :  $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

sont dans  $W$  donc  $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$  et  $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$ . On a  $\vec{u} + \vec{v} \in W$  car :

$$\begin{aligned} a(u_1 + v_1) + b(u_2 + v_2) + c(u_3 + v_3) &= au_1 + av_1 + bu_2 + bv_2 + cu_3 + cv_3 \\ &= \underbrace{au_1 + bu_2 + cu_3}_{=0} + \underbrace{av_1 + bv_2 + cv_3}_{=0} \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

3.  $\lambda\vec{u} \in W, \vec{u} \in W$  : on fait le même raisonnement qu'au point précédent.

4)  $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 1, a, b, c \neq 0 \right\}$ . On montre que ce n'est pas un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ . On a  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin W$  car  $a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 = 0 \neq 1$ .  $W$  reste un ensemble de  $\mathbb{R}^3$ , mais ce n'est pas un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  (ce n'est pas non plus un espace vectoriel).

## Sous-EV engendrés par une partie de $V$

Dans  $\mathbb{R}^n$ , on a vu que  $\text{span}\{\vec{v}\}$ ,  $\text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$  etc sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^n$ . On peut généraliser la notion de span aux espaces vectoriels  $V$ . Soient  $u, v \in V$  on peut définir  $W = \text{span}\{u, v\}$ . On a que  $W$  est un sous-espace vectoriel de  $V$

$$W = \text{span}\{u, v\} = \{w \in V \mid w = \alpha u + \beta v, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

Par définition on aura  $W \subset V$ . Vérifions les trois axiomes.

$0_V \in W$  : on prend  $\alpha = \beta = 0$  et

$$0_V = 0 \cdot u + 0 \cdot v$$

$u_1, u_2 \in W \Rightarrow u_1 + u_2 \in W$  : on a

$$u_1 = \alpha_1 u + \beta_1 v \quad \text{et} \quad u_2 = \alpha_2 u + \beta_2 v, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$$

On a

$$u_1 + u_2 = \alpha_1 u + \beta_1 v + \alpha_2 u + \beta_2 v = (\alpha_1 + \alpha_2)u + (\beta_1 + \beta_2)v$$

Donc  $u_1 + u_2 \in W$ .

$u_1 \in W, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda u_1 \in W$  : on a  $u_1 = \alpha u + \beta v$  et

$$\lambda u_1 = \lambda(\alpha u + \beta v) = (\lambda\alpha)u + (\lambda\beta)v$$

Donc  $\lambda u_1 \in W$ .

$W$  est un sous-espace vectoriel de  $V$ .

**Théorème 4.7.** Soient  $v_1, v_2, \dots, v_p$  des éléments (des vecteurs) d'un espace vectoriel  $V$ . Alors  $\text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$  est un sous-espace vectoriel de  $V$ .

**Définition 4.8** (famille génératrice).

On dira que  $\{v_1, \dots, v_p\}$  est une *famille génératrice* de  $\text{span}\{v_1, \dots, v_p\}$ . Elle génère (engendre)  $\text{span}\{v_1, \dots, v_p\}$ .

Par exemple on peut avoir

$$\text{span}\{1, t, t^2\} = \{p(t) = \alpha + \beta t + \gamma t^2 \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

## 4.2 Noyau, image et applications linéaires

**Rappel :** Si  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  est une application linéaire, il existe une unique matrice  $A$  (canoniquement associée) de taille  $m \times n$  telle que  $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ .

Par exemple  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$   $T(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_3 \\ \frac{1}{2}x_2 \end{pmatrix}$ . On a

$$A = (T(\vec{e}_1) \quad T(\vec{e}_2) \quad T(\vec{e}_3)) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Mais si  $T : V \rightarrow W$ , avec  $V, W$  des espaces vectoriels différents de  $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ , comment pouvons-nous trouver une matrice  $A$  telle que  $T(x) = Ax$ ? Est-ce que  $A$  existe? On verra, à la section ?? qu'une telle matrice n'existe pas directement.

**Définition 4.9** (noyau d'une matrice).

Soit  $A$  une matrice de taille  $m \times n$ . Le *noyau de la matrice  $A$* , noté  $\text{Ker}(A)$  est l'ensemble des solutions de  $A\vec{x} = \vec{0}$ . On le note

$$\text{Ker}(A) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = \vec{0}\}$$

On a  $\text{Ker}(A) \subseteq \mathbb{R}^n$ .

*Remarque:* Comparer  $\text{Ker}(A)$  avec  $\text{Ker}(T)$  définit dans la Définition 1.71. On verra surtout la différence quand  $T$  sera une application linéaire de  $V$  vers  $W$ , des espaces vectoriels différents de  $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ .

**Théorème 4.10.** *Le noyau d'une matrice  $A$  de taille  $m \times n$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ .*

*Démonstration.* voir le cours. □

**Définition 4.11** (image d'une matrice).

Soit  $A$  une matrice de taille  $m \times n$  et soient  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ . L'*image de  $A$* , noté  $\text{Im}(A)$  est l'espace engendré par les colonnes de  $A$ . On a

$$\text{Im}(A) = \text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$$

**Théorème 4.12.**  *$\text{Im}(A)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^m$ .*

*Remarque:* Pour  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  linéaire, on a l'existence et l'unicité de  $A$  telle que  $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ . L'image,  $\text{Im}(T)$  est alors définie par

$$\begin{aligned} \text{Im}(T) &= \left\{ \vec{b} \in \mathbb{R}^m \mid \exists \vec{x} \in \mathbb{R}^n : T(\vec{x}) = \vec{b} \right\} \\ &= \left\{ \vec{b} \in \mathbb{R}^m \mid \exists \vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = \vec{b} \right\} \end{aligned}$$

On peut montrer que  $\text{Im}(T) = \text{Im}(A)$  (dans ce cas précis)

1)  $\text{Im}(T) \subset \text{Im}(A)$  : Soit  $\vec{b} \in \text{Im}(T)$ . Alors il existe  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  tel que  $T(\vec{x}) = \vec{b}$ . Or  $T(\vec{x}) = A\vec{x}$  donc il existe  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  tq  $A\vec{x} = \vec{b}$ .

$$\implies \exists \vec{x} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \vec{b} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_n\vec{a}_n$$

Or il s'agit d'une combinaison linéaire des colonnes de  $A$ , ainsi

$$\vec{b} \in \text{span}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\} \implies \vec{b} \in \text{Im}(A)$$

2)  $\text{Im}(A) \subset \text{Im}(T)$  : Soit  $\vec{b} \in \text{Im}(A)$ , alors  $\vec{b} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n$ ,  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ . On a

$$\vec{b} = (\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \dots \quad \vec{a}_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \implies \vec{b} = A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Ainsi, il existe un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$  tel que  $\vec{b} = A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ .

Puisque  $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ , on a  $\vec{b} = T \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ . Donc  $\vec{b} \in \text{Im}(T)$ .

On a  $\text{Im}(A) = \text{Im}(T)$ .

**Exemple 4.13.**

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 7 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$  Par la définition, on a

$$\text{Im}(A) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

Mais peut-on "mieux décrire"  $\text{Im}(A)$ ? est-ce que  $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$  est une base de  $\text{Im}(A)$ ?

$$A \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La dernière colonne n'est pas une colonne pivot, donc les colonnes ne sont pas linéairement indépendantes.

On a que  $-2\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{a}_3$ . Donc

$$\text{Im}(A) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \quad \vec{a}_3 \text{ est superflu}$$

et  $\text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\} = \text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ .

On a  $\text{Im}(A) \subset \mathbb{R}^3$  (et pas  $\text{Im}(A) = \mathbb{R}^3$ )

Cherchons maintenant le noyau de  $A$  :  $\text{Ker}(A) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\vec{x} = \vec{0}\}$

On prend la forme échelonnée-réduite de  $A$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

On obtient

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 2t \\ -t \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{on a } \vec{s} = t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui nous donne

$$\text{Ker}(A) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

**Définition 4.14** (application linéaire).

Soient  $V$  et  $W$  deux espaces vectoriels. Soit  $T : V \rightarrow W$ .  $T$  est une *application linéaire* si elle associe à tout élément  $v$  de  $V$  un unique élément  $T(v)$  de  $W$  et si  $T$  vérifie

1.  $T(u + v) = T(u) + T(v)$
2.  $T(\alpha u) = \alpha T(u)$

pour tous  $u, v \in V$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

**Définition 4.15** (noyau et image d'une application).

Soient  $V, W$  des EV et  $T : V \rightarrow W$  une application linéaire.

Le *noyau de l'application*  $T$ , noté  $\text{Ker}(T)$  est l'ensemble des solutions de  $T(x) = 0_W$ . On le note

$$\text{Ker}(T) = \{x \in V \mid T(x) = 0_W\} \subseteq V$$

L'*image de l'application*  $T$ , notée  $\text{Im}(T)$  est définie par

$$\text{Im}(T) = \{b \in W \mid \exists x \in V : T(x) = b\} \subseteq W$$

**Exemple 4.16.**

Soit  $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$  définit par

$$T(p(t)) = (a_0 + a_1)t + a_2t^2$$

On cherche  $\text{Ker}(T)$  et  $\text{Im}(T)$ . Ici on a pas de matrice qui représente notre application.

1.  $\text{Ker}(T)$  : on cherche les polynômes  $p \in \mathbb{P}_2$  tels que  $T(p) = 0$  où 0 est le polynôme nul.

On a

$$a_0 + a_1t + a_2t^2 = 0$$

On doit égaliser "degré par degré", ceci nous donne un système de trois inconnues et trois équations

$$\begin{cases} a_0 + a_1 & = 0 \\ a_1 & = 0 \\ a_2 & = 0 \end{cases}$$

On obtient  $a_0 = a_1 = a_2 = 0$  et  $\text{Ker}(T) = \{0\}$ .

2.  $\text{Im}(T)$  : soit  $b \in \mathbb{P}_2$  un polynôme donné par  $b(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2$ . À résoudre  $T(p) = b$ .

$$(a_0 + a_1)t + a_2t^2 = b_0 + b_1t + b_2t^2$$

On obtient un système

$$\begin{cases} a_0 + a_1 & = b_0 \\ a_1 & = b_1 \\ a_2 & = b_2 \end{cases}$$

Ce qui nous donne  $a_0 = b_0 - b_1$ ,  $a_1 = b_1$  et  $a_2 = b_2$ . En fonction de  $b_0, b_1$ , et  $b_2$  on pourra trouver  $a_0, a_1$  et  $a_2$  et avoir  $T(p) = b$  - l'équation est toujours compatible. On a alors que pour tout  $b \in \mathbb{P}_2$ , il existe  $p \in \mathbb{P}_2$  tel que  $T(p) = b$ . Ainsi  $\text{Im}(T) = \mathbb{P}_2$ .

### 4.3 Bases d'espaces vectoriels

Une base est une famille d'éléments linéairement indépendants et génératrice.

**Définition 4.17** ((In)dépendance linéaire).

Soit  $V$  un espace vectoriel. Alors la famille  $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$  d'éléments de  $V$  est dite *linéairement indépendante* si

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_p v_p = 0_V$$

n'admet que la solution triviale  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0$  ( $\in \mathbb{R}$ ). Sinon, la famille est linéairement dépendante.

**Exemple 4.18.** 1) Soient  $p_1(t) = 1$ ,  $p_2(t) = t$ , et  $p_3(t) = t^2$ , trouvons  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$  tels que

$$\alpha_1 p_1(t) + \alpha_2 p_2(t) + \alpha_3 p_3(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

C'est-à-dire

$$\alpha_1 + \alpha_2 t + \alpha_3 t^2 = 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

On prend plusieurs  $t \in \mathbb{R}$  bien choisis :

- $t = 0$  : on a  $\alpha_1 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 = 0 \implies \alpha_1 = 0$ .
- $t = -1$  : on a  $\alpha_1 - \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 = 0 \implies \alpha_2 = \alpha_3$  car  $\alpha_1 = 0$ .
- $t = 1$  : on a  $\alpha_1 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 = 0 \implies 2\alpha_2 = 0 \implies \alpha_2 = 0$

Donc  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$  donc  $1, t, t^2$  est linéairement indépendante.

2)  $\{1, t, 1 - t\}$  est linéairement dépendante car  $p_3 = p_1 - p_2$ .

3)  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$  est-elle linéairement indépendante? On met les vecteurs dans une matrice et on échelonne.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

On obtient 3 pivots et donc 3 colonnes pivots, donc elles sont linéairement indépendantes.

*Remarque:* Dans  $\mathbb{R}^n$  on peut construire une matrice  $A = (\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \dots \ \vec{v}_p)$  et échelonner. Mais avec  $V = \mathbb{P}_n$  ou  $V = M_{n \times n}(\mathbb{R})$ , on ne sait pas comment construire une matrice pour échelonner. Par exemple, on ne peut pas construire  $(1 \ t \ 1 - t)$ , cela ne veut rien dire. On verra au chapitre 4 comment faire.

**Théorème 4.19.** Une famille  $\{v_1, \dots, v_p\}$ ,  $p \geq 2$  est linéairement dépendante  $\Leftrightarrow$  au moins un des éléments de la famille est combinaison linéaire des autres.

**Définition 4.20** (base).

Soit  $V$  un espace vectoriel. Soit  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_p\}$  une famille d'éléments de  $V$ . Alors  $\mathcal{B}$  est une *base* de  $V$  si

1.  $\mathcal{B}$  est linéairement indépendante
2.  $\mathcal{B}$  est une famille génératrice de  $V$ , c'est-à-dire  $V = \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$

*Remarque:* Il existe aussi des bases de sous-espace vectoriels.

**Exemple 4.21.**

- 1)  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .
- 2)  $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$ ,  $n \times n$  inversible  $\leftrightarrow \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$  est une base de  $\mathbb{R}^n$ .
- 3)  $1, t, t^2$  est la base canonique de  $\mathbb{P}_2$
- 4)  $1, t, t^2, \dots, t^n$  est la base canonique de  $\mathbb{P}^n$
- 5)  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$  est la base canonique de  $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ .
- 6) Soient  $p_1(t) = 1+t$ ,  $p_2(t) = t$  et  $p_3(t) = 2$ . On a  $\text{span}\{p_1, p_2, p_3\} = \mathbb{P}_1$ . On montre cette égalité. Soit  $q(t) \in \mathbb{P}_1$ . On a  $q(t) = a_0 + a_1 t$ . Il s'écrit comme combinaison linéaire des  $p_i$  avec  $q(t) = 0 \cdot p_1(t) + a_1 \cdot p_2(t) + \frac{a_0}{2} \cdot p_3(t)$  avec  $a_0, a_1, a_2$  les coefficients de la combinaison linéaire. Donc  $\mathbb{P}_1 \subset \text{span}\{p_1, p_2, p_3\}$ . Or par définition,  $\text{span}\{p_1, p_2, p_3\} \subset \mathbb{P}_1$ . Donc  $\mathbb{P}_1 = \text{span}\{p_1, p_2, p_3\}$ . Est-ce que  $\{p_1, p_2, p_3\}$  est une base de  $\mathbb{P}_1$ ? Non, car  $p_1 = p_2 + \frac{1}{2}p_3$  donc elle n'est pas linéairement indépendante. On a que  $p_1$  est superflu. On a  $\text{span}\{p_1, p_2, p_3\} = \text{span}\{p_2, p_3\} = \mathbb{P}_1$ . On a  $\{p_2, p_3\}$  est une base de  $\mathbb{P}_1$ , mais ce n'est pas la base canonique.

**Théorème 4.22** (base extraite). Soient  $V$  un espace vectoriel et  $S = \{v_1, \dots, v_p\}$  une famille de  $p$  éléments de  $V$ . Soit  $W = \text{span}\{v_1, \dots, v_p\}$  le sous-espace vectoriel de  $V$  engendré par  $S$ . Alors

1. Si un des éléments de  $S$ , disons  $v_k$ , s'écrit comme combinaison linéaire des autres, on aura que  $\{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_p\}$  reste une famille génératrice de  $W$ .
2. Si  $W \neq 0_v$ , alors il existe une famille d'éléments extraits de  $S$ , qui forme une base de  $W$ .

*Remarque:*

$\{0_v\}$  n'a pas de base.

## Bases de $\text{Ker}(A)$ et $\text{Im}(A)$

**Exemple 4.23.**

Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -2 & -4 & 2 \\ 4 & 8 & -4 \end{pmatrix}$  Cherchons une base de  $\text{Ker}(A)$  et  $\text{Im}(A)$ .

On a  $\text{Ker}(A) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\vec{x} = \vec{0}\} \subseteq \mathbb{R}^3$ . On échelonne  $A$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -2 & -4 & 2 \\ 4 & 8 & -4 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a  $x_1, x_2$  variables principales et  $x_3$  libre

On obtient  $\vec{s} = \begin{pmatrix} -t \\ t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$ .

On obtient  $\text{Ker}(A) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ .

**Résultat :** Le nombre de variables libres est égal au nombre de vecteurs dans la base de  $\text{Ker}(A)$ .

Cherchons maintenant une base de l'image de  $A$ :  $\text{Im}(A) = \text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$  mais est-ce que  $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$  est linéairement indépendante? Non car  $\vec{a}_1 - \vec{a}_2 = \vec{a}_3$  (on trouve cela grâce au noyau). Donc  $\text{Im}(A) = \text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ ,  $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$  est une base de  $\text{Im}(A)$ .

**Théorème 4.24.** Soient  $A$  une matrice de taille  $m \times n$  et  $B$  une forme échelonnée de  $A$ . Alors

1. Les colonnes pivots de  $B$  sont linéairement indépendantes
2. Les colonnes pivots de  $A$  (c'est-à-dire celles qui correspondent aux colonnes pivots de  $B$ ) sont linéairement indépendantes.
3. Les colonnes non-pivots sont combinaisons linéaires des autres.

**Constat :** Les opérations élémentaires préservent les relations d'indépendance ou de dépendance linéaire.

### Stratégie pour trouver une base de $\text{Im}(A)$

1. échelonner  $A$
2. trouver les colonnes pivots
3. prendre les colonnes de  $A$  correspondantes aux colonnes pivots de la forme échelonnée

On obtient ainsi une base de  $\text{Im}(A)$ .

Attention on doit prendre **les colonnes de  $A$  et pas celles de la forme échelonnée** ou échelonnée-réduite, car on risque d'avoir un sous-EV différent de  $\text{Im}(A)$ !

**Suite de l'exemple 4.23 :**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -2 & -4 & 2 \\ 4 & 8 & -4 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a que  $\text{Im}(A) = \text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ . Or,  $\vec{a}_3 = \vec{a}_1 - \vec{a}_2$  donc  $\vec{a}_3$  est superflu et donc  $\text{Im}(A) = \text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$  et comme la famille  $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$  est linéairement indépendante, c'est une base de

$\text{Im}(A)$ .

Montrons qu'il faut bien considérer les colonnes de la matrice  $A$  et pas celles de la forme échelonnée réduite (ou échelonnée) : on montre  $\text{Im}(A) \neq \text{span}\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ .

Si  $\vec{a}_1$  ou  $\vec{a}_2 \notin \text{span}\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$  on aura  $\text{Im}(A) \neq \text{span}\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ . On peut aussi montrer que  $\vec{b}_1$  ou (et)  $\vec{b}_2$  n'est pas dans  $\text{Im}(A)$ .

On montre que  $\vec{a}_1 \notin \text{span}\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$  :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \alpha = 2, \beta = -2, 0 = 4.$$

Or  $0 = 4$  n'est jamais vraie donc cette équation n'admet pas de solutions ! Donc  $\vec{a}_1 \notin \text{span}\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$

**Résumé** : les colonnes pivots de  $A$  nous donne une base de  $\text{Im}(A)$

Le nombre de variables libres nous donne le nombre de vecteurs dans la base de  $\text{Ker}(A)$ .

Mais attention, les colonnes non-pivots de  $A$  ne nous donne pas une base du noyau  $\text{Ker}(A)$ .

En effet : si  $A$  est de taille  $m \times n$ , on a  $\vec{a}_i \in \mathbb{R}^m$

Ainsi l'ensemble des combinaisons linéaires des colonnes (ou de n'importe quelle famille composée de colonnes de  $A$ ) reste un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^m$  :  $\text{span}\{\text{colonnes non-pivots de } A\} \subseteq \mathbb{R}^m$ . Or, par définition du noyau  $\text{Ker}(A) \subseteq \mathbb{R}^n$ , donc les colonnes de  $A$  (pivot ou non) ne peuvent pas nous donner une base du noyau (en général). Voir l'exemple ci-dessous.

**Exemple 4.25.**

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 5 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$

On échelonne  $A$  et on cherche une base de l'image et une base du noyau. On veut s'assurer que les vecteurs obtenus pour le noyau sont bien linéairement indépendants.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 5 & 8 & -4 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a  $x_1, x_3$  variables principales et  $x_2, x_4, x_5$  sont des variables libres.

On a  $\text{Im}(A) = \text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_3\}$ .  
Cherchons le noyau  $\text{Ker}(A)$ .

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 + x_4 - 3x_5 \\ x_2 \text{ libre} \\ x_3 = -2x_4 + 2x_5 \\ x_4 \text{ libre} \\ x_5 \text{ libre} \end{cases}$$

Prenons des paramètres pour  $x_2, x_4$ , et  $x_5$ , supposons  $k, r, t$  respectivement :

$$\vec{s} = k \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_1} + r \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_2} + t \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_3}$$

On a  $\text{Ker}(A) = \text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ . Mais est-ce que  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  est une base? Il faut vérifier si elle est génératrice et si elle est linéairement indépendante. Elle est famille génératrice, par définition du span. Montrons qu'elle est linéairement indépendante :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

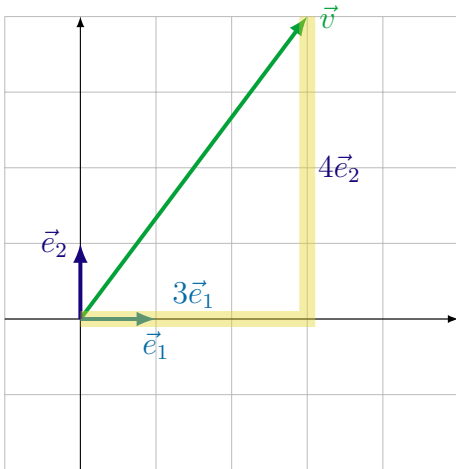
On obtient  $\alpha = 0, \beta = 0$  et  $\gamma = 0$ , donc oui elle est linéairement indépendante et c'est une base de  $\text{Ker}(A)$ .

## 4.4 Systèmes de coordonnées

### Rappel

- )  $S = \{a, b, c\}$  est un ensemble qui contient  $a, b$ , et  $c$ , et l'ordre d'écriture des éléments n'importe pas.  $\{b, a, c\}$  est le même ensemble que  $S$ . On a vu cette notation lorsque l'on parle d'une famille de vecteur  $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$  et pour les span.
- )  $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$  est une liste ordonnée qui contient  $s_1, \dots, s_n$ . L'ordre des éléments est important. On a vu cette notation lorsque l'on parle de solutions de système d'équations ou quand on a parlé des bases ordonnées.

1) soit  $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$



On a

$$\vec{v} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\text{vecteur}} = \underbrace{3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2}_{\text{combinaison linéaire}}$$

On a

- 3 = première composante de  $\vec{v}$  = coeff devant  $\vec{e}_1$
- 4 = deuxième composante de  $\vec{v}$  = coeff devant  $\vec{e}_2$

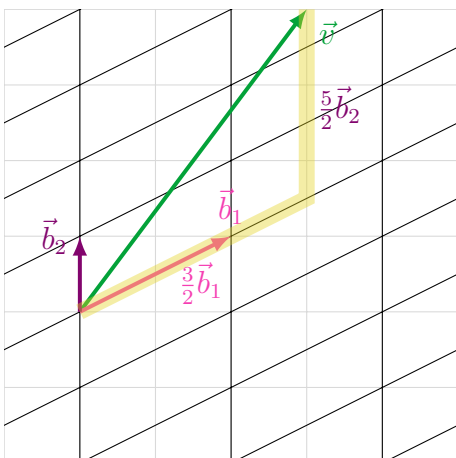
ICI on a que les composantes de  $\vec{v}$  sont égales aux coefficients de la combinaison linéaire.

2) Soit  $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$  une base de  $\mathbb{R}^2$  avec  $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Soit  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ . On a toujours

$$\vec{v} = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$$

Mais on ne peut pas dire que les composantes de  $\vec{v}$  sont les coefficients de la combinaison linéaire de  $\vec{v}$  dans la base  $\mathcal{B}$ . En effet

$$\vec{v} \neq 3\vec{b}_1 + 4\vec{b}_2$$



On cherche  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$  tels que  $\vec{v} = \alpha_1\vec{b}_1 + \alpha_2\vec{b}_2$ .  
On obtient

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{3}{2}, \alpha_2 = \frac{5}{2}$$

et donc

$$\vec{v} = \frac{3}{2}\vec{b}_1 + \frac{5}{2}\vec{b}_2$$

ICI les composantes de  $\vec{v}$  ne sont pas égales aux coefficients de la combinaison linéaire de  $\vec{v}$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

On dira que les coefficients de la combinaison linéaire dans la base  $\mathcal{B}$  sont les composantes de  $\vec{v}$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

On note cela

$$[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 5/2 \end{pmatrix}$$

On a que 3 et 4 sont les composantes de  $\vec{v}$  dans la base  $\mathcal{E}$ , comme c'est la base canonique, on dira que 3 et 4 sont simplement "les composantes de  $\vec{v}$ ".

### Résumé

Base canonique  $\mathcal{E}$  :  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$ . On a  $[\vec{v}]_{\mathcal{E}} = \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Base  $\mathcal{B}$  :  $\vec{v} = \frac{3}{2}\vec{b}_1 + \frac{5}{2}\vec{b}_2$ . On a  $[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 5/2 \end{pmatrix}$

**Théorème 4.26.** Soient  $V$  un espace vectoriel et soit  $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$  une base de  $V$ . Alors pour tout  $v \in V$  il existe  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  uniques tels que

$$v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_n b_n$$

**Définition 4.27** (composantes dans une base).

Les scalaires  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  sont les *composantes/coordonnées* de l'élément  $v$  dans la base  $\mathcal{B}$ . On note

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

*Remarque:* Si  $V = \mathbb{R}^n$  et si on prend la base canonique  $\mathcal{E}$  de  $\mathbb{R}^n$  alors on a

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v_1 \vec{e}_1 + \dots + v_n \vec{e}_n \Rightarrow [\vec{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Dans ce cas on a  $[\vec{v}]_{\mathcal{E}} = \vec{v}$ .

**Exemple 4.28.**

Soient  $\mathbb{P}_1 = \{p(t) = a_0 + a_1t \mid a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$  et  $\mathcal{E} = (1, t)$  la base canonique de  $\mathbb{P}_1$ . Posons  $p_1(t) = 1, p_2(t) = t$ . Soit  $p(t) = 2 + 3t$ . Alors

$$p(t) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot t = 2p_1(t) + 3p_2(t)$$

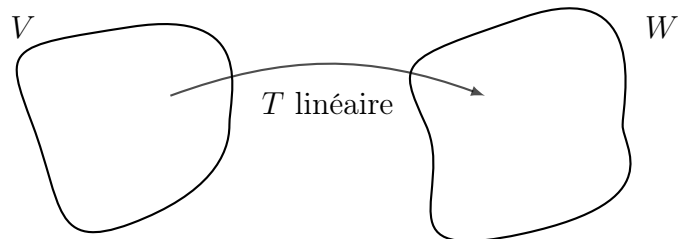
On a

$$[p(t)]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

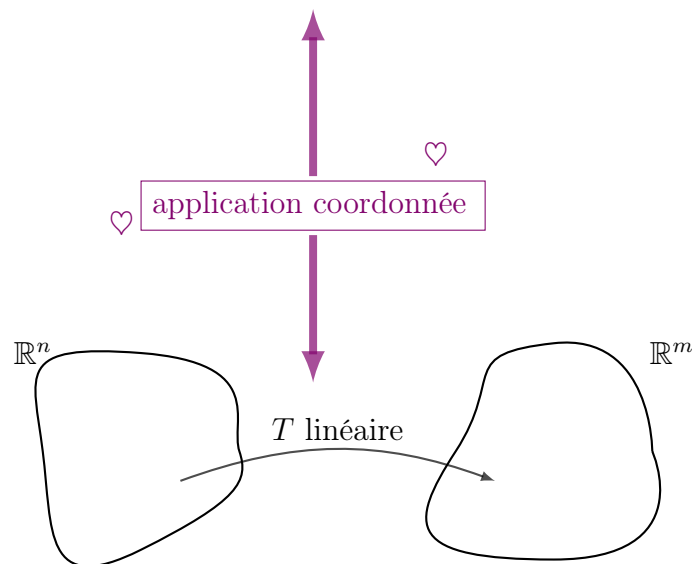
Soit  $q(t) = -\frac{5}{2}t$ . On a

$$[q(t)]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5/2 \end{pmatrix}$$

**Schéma du chapitre 4**



- × matrice associée ?
- × transfert des infos à un ordinateur ?
- × interprétation du résultat ?



- ✓ matrice associée ?
- ✓ transfert des infos à un ordinateur ?

## Exemple et interprétation géométrique de $[\cdot]_{\mathcal{B}}$

Soit  $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$  une base de  $\mathbb{R}^2$  donnée par  $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

- $\vec{b}_1, \vec{b}_2$  sont des vecteurs de  $\mathbb{R}^2$
- $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^2$

Donc  $\vec{b}_1, \vec{b}_2$  peuvent s'écrire comme combinaisons linéaires de  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  :

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 \implies [\vec{b}_1]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{b}_1$$

$$\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \vec{e}_1 + 2 \cdot \vec{e}_2 \implies [\vec{b}_2]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{b}_2$$

Mais on a aussi que  $\vec{b}_1$  et  $\vec{b}_2$  peuvent s'écrire comme combinaisons linéaires de la base  $\mathcal{B}$

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \vec{b}_1 + 0 \cdot \vec{b}_2 \implies [\vec{b}_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \cdot \vec{b}_1 + 1 \cdot \vec{b}_2 \implies [\vec{b}_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc  $[\vec{b}_i]_{\mathcal{B}} \neq \vec{b}_i$ .

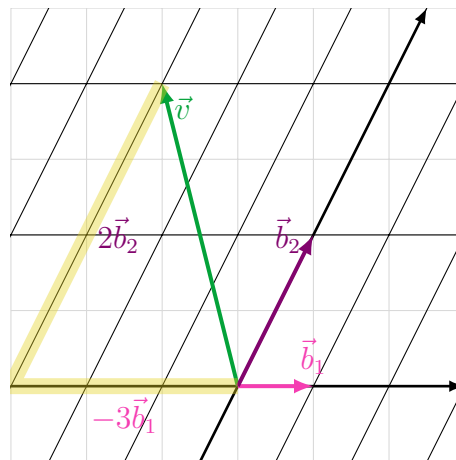
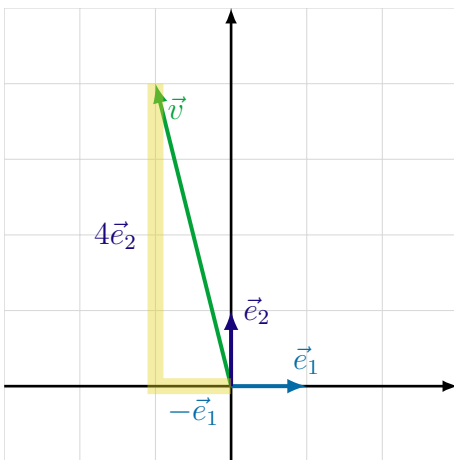
Soit  $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$  donné par  $[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$  et cherchons  $\vec{v}$  (et donc  $[\vec{v}]_{\mathcal{E}}$  car  $[\vec{v}]_{\mathcal{E}} = \vec{v}$ )

On a  $[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{v} = -3\vec{b}_1 + 2\vec{b}_2$

$$\vec{v} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

On obtient

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} (= [\vec{v}]_{\mathcal{E}})$$



On peut passer de  $[\vec{v}]_{\mathcal{E}}$  à  $[\vec{v}]_{\mathcal{B}}$  avec un changement de bases. On verra plus loin comment trouver le changement de bases et le représenter par une matrice.

## L'application coordonnée

Soient  $V$  un espace vectoriel et  $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  une base de  $V$ . Alors pour tout  $v \in V$  on a  $v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_n b_n$  et  $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ . On définit l'application coordonnée par

$$[\cdot]_{\mathcal{B}} : V \rightarrow \mathbb{R}^n \\ v \mapsto [v]_{\mathcal{B}}$$

**Théorème 4.29.**  $[\cdot]_{\mathcal{B}}$  est une application linéaire et bijective.

*Démonstration.* voir le cours □

### Exemple 4.30.

1. Soit  $V = \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ . Soit  $\mathcal{B}$  la base canonique de  $V$ . Alors

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow [M]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

2. Soient  $V = \mathbb{P}_3$  et  $\mathcal{E} = (1, t, t^2, t^3)$  la base canonique de  $V$ . Alors

$$p(t) = -\frac{3}{2} + t^2 - t^3 \Rightarrow [p(t)]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

**Remarque :** une application linéaire et bijective d'un EV à un autre EV s'appelle un isomorphisme. Les relations d'indépendance linéaire sont conservées.

### Exemple 4.31.

Soit  $\mathcal{E} = (1, t, t^2, t^3)$  la base canonique de  $\mathbb{P}_3$ .

Soient  $p(t) = 1 + 2t - t^3$  et  $q(t) = t - t^2 - 2t^3$ , sont-ils linéairement indépendants ?

On peut procéder de deux manières différentes.

Soit on résout  $\alpha p(t) + \beta q(t) = 0$  et on regarde si  $\alpha = \beta = 0$  est l'unique solution.

Soit on utilise l'application coordonnée  $[\cdot]_{\mathcal{E}} : \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ . On a

$$[p(t)]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } [q(t)]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

On a  $p, q$  linéairement indépendants si et seulement si  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$  sont linéairement

indépendants. On a

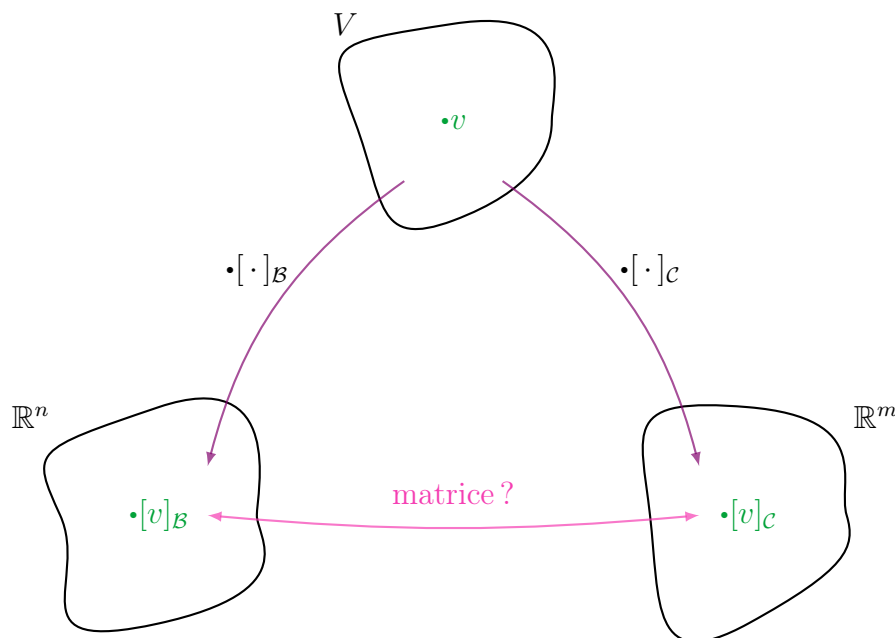
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc les deux polynômes sont linéairement indépendants car il y a un pivot par colonnes (et donc que les deux colonnes sont linéairement indépendantes).

## Changement de bases

**Idée** : utiliser une matrice pour faire les changements de bases. On appellera cette matrice une *matrice de changement de bases* ou une *matrice de changement de coordonnées*.

Soit  $V$  un espace vectoriel et soient  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  deux bases de  $V$  avec  $n$  éléments.



Comme  $[v]_{\mathcal{B}}$  et  $[v]_{\mathcal{C}}$  sont dans  $\mathbb{R}^n$  on pourra trouver une matrice pour passer de l'un à l'autre.

### Exemple 4.32.

Soit  $V = \mathbb{R}^2$  et soient  $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  la base canonique de  $V$  et  $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ , une autre base donnée par  $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Soit  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

On va chercher  $[\vec{v}]_{\mathcal{B}}$  et une matrice associée à ce changement de bases/ coordonnées.

On cherche  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$  tels que  $\vec{v} = \alpha_1 \vec{b}_1 + \alpha_2 \vec{b}_2$ . On aura  $[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ .

On a

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \alpha_1 \vec{b}_1 + \alpha_2 \vec{b}_2 \\ \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} &= \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \left( \begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{array} \right) \\ \alpha_1 &= \frac{2}{3}, \alpha_2 = -\frac{8}{3}\end{aligned}$$

Donc  $[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -8/3 \end{pmatrix}$ .

On étudie la matrice augmentée :

$$\left( \begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{array} \right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}}_{=[\vec{v}]_{\mathcal{B}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}}_{[\vec{v}]_{\mathcal{E}}}$$

On voit que  $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (\vec{b}_1 \quad \vec{b}_2)$  et qu'elle envoie  $[\vec{v}]_{\mathcal{B}}$  sur  $[\vec{v}]_{\mathcal{E}}$  :

$$(\vec{b}_1 \quad \vec{b}_2)[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = [\vec{v}]_{\mathcal{E}}$$

Comme on a  $\vec{b}_i = [\vec{b}_i]_{\mathcal{E}}$  on peut écrire

$$([\vec{b}_1]_{\mathcal{E}} \quad [\vec{b}_2]_{\mathcal{E}})[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = [\vec{v}]_{\mathcal{E}}$$

On dira que  $([\vec{b}_1]_{\mathcal{E}} \quad [\vec{b}_2]_{\mathcal{E}})$  est la *matrice de changement de bases* ou *matrice de changement de coordonnées* de la base  $\mathcal{B}$  (de départ) vers la base  $\mathcal{E}$  (d'arrivée).

On la note  $P_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$  ou  $P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}}$  et elle est donnée par

$$P_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = ([\vec{b}_1]_{\mathcal{E}} \quad [\vec{b}_2]_{\mathcal{E}})$$

On obtient

$$P_{\mathcal{E}\mathcal{B}}[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = [\vec{v}]_{\mathcal{E}}$$

*Remarque:*

- on obtient  $[\vec{v}]_{\mathcal{B}}$  en résolvant un système ou une matrice augmentée
- si on cherche  $[\vec{v}]_{\mathcal{E}}$  et qu'on connaît  $[\vec{v}]_{\mathcal{B}}$ , on devra faire une multiplication matrice-vecteur.

## Généralisation à $\mathbb{R}^n$

Soient  $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n)$  une autre base de  $\mathbb{R}^n$ .

Soit  $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$  (ici  $[\vec{v}]_{\mathcal{E}} = \vec{v}$ ).

On cherche  $[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ , c'est-à-dire :

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{b}_1 + \alpha_2 \vec{b}_2 + \dots + \alpha_n \vec{b}_n$$

On devra résoudre  $P_{\mathcal{E}\mathcal{B}}[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = [\vec{v}]_{\mathcal{E}}$  avec  $P_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = \left( [\vec{b}_1]_{\mathcal{E}} \dots [\vec{b}_n]_{\mathcal{E}} \right)$ .

Or  $[\vec{b}_i]_{\mathcal{E}} = \vec{b}_i \quad \forall i = 1 \dots n$

Donc  $P_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = \left( \vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \dots \ \vec{b}_n \right)$ . Dans ce cas, la matrice de changement de base (ou coordonnées) s'obtient facilement (les colonnes sont directement données par la base  $\mathcal{B}$ .)

### Exemple 4.33.

Soit  $\mathcal{B} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ . Soit  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ , on cherche  $[\vec{v}]_{\mathcal{B}}$ . On a  $[\vec{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{v}$ , et

$$P_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On doit résoudre  $P_{\mathcal{E}\mathcal{B}}[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = [\vec{v}]_{\mathcal{E}}$ , c'est-à-dire

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \Leftrightarrow \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 2$$

Donc  $[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ , c'est-à-dire  $\vec{v} = 1\vec{b}_1 + 0\vec{b}_2 + 2\vec{b}_3$ .

## Généralisation à $V$

Soient  $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  et  $\mathcal{C} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$  deux bases d'un espace vectoriel  $V$ . Soit  $v \in V$ . Supposons que  $P_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$  soit facile à obtenir. On a

$$P_{\mathcal{C}\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{C}}.$$

On a 2 situations

1. on cherche  $[v]_{\mathcal{B}}$  et on connaît  $[v]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$ . On a  $v = \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \dots + \gamma_n c_n$ . On devra résoudre

résoudre

$$P_{\mathcal{C}\mathcal{B}} \underbrace{[v]_{\mathcal{B}}}_{\text{inconnue}} = [v]_{\mathcal{C}}$$

où  $P_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = ([b_1]_{\mathcal{C}} \ [b_2]_{\mathcal{C}} \ \dots \ [b_n]_{\mathcal{C}})$  est la matrice de changement de bases (coordonnées) de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{C}$ .

2. on cherche  $[v]_{\mathcal{C}}$  et on connaît  $[v]_{\mathcal{B}}$ . On devra résoudre

$$P_{\mathcal{C}\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{C}}$$

C'est une multiplication matrice-vecteur.

*Remarque:* si  $P_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  est facile à obtenir on pourrait travailler plutôt avec

$$P_{\mathcal{B}\mathcal{C}}[v]_{\mathcal{C}} = [v]_{\mathcal{B}}$$

**Exemple des deux situations 1) et 2) dans  $\mathbb{R}^2$**

On va étudier le lien entre les deux stratégies énoncées précédemment, le but est de voir comment les deux matrices se construisent et, plus tard, de faire le lien entre elles. Dans certaines situations, une des deux matrices est "facile" à obtenir, mais ce ne sera pas le cas dans cet exemple.

Soient  $\mathcal{B} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  et  $\mathcal{C} = \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$  deux bases de  $\mathbb{R}^2$ .

*Remarque:* On note qu'il n'y a pas la base canonique dans les deux bases données. La base canonique est présente dans  $\mathbb{R}^2$  mais on cherche un changement de bases (coordonnées) entre  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$ .

1. Soit  $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ , tel que  $[\vec{v}]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$  On cherche  $[\vec{v}]_{\mathcal{B}}$ . Ici  $P_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$  ou  $P_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  ne sont pas "facile" à obtenir.

On choisit  $P_{\mathcal{C}\mathcal{B}}[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = [\vec{v}]_{\mathcal{C}}$ , avec

$$P_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \left( [\vec{b}_1]_{\mathcal{C}} \quad [\vec{b}_2]_{\mathcal{C}} \right)$$

Il faut trouver les deux colonnes de la matrice.

$$[\vec{b}_1]_{\mathcal{C}} : \vec{b}_1 = \alpha_1 \vec{c}_1 + \alpha_2 \vec{c}_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 = 1 \\ -\alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1/2 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

$$[\vec{b}_1]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[\vec{b}_2]_{\mathcal{C}} : \vec{b}_2 = \beta_1 \vec{c}_1 + \beta_2 \vec{c}_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2\beta_1 = 1 \\ -\beta_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = 1/2 \\ \beta_2 = -1 \end{cases}$$

$$\text{Donc } P_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \left( [\vec{b}_1]_{\mathcal{C}} \quad [\vec{b}_2]_{\mathcal{C}} \right) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On résout

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1/2 & 1/2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

$$\text{Donc } [\vec{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2. Soit  $\vec{w} \in \mathbb{R}^2$  tel que  $[\vec{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ . On cherche  $[\vec{w}]_{\mathcal{C}}$ . Cette fois, il faut faire une multiplication matrice-vecteur :  $P_{\mathcal{C}\mathcal{B}}[\vec{w}]_{\mathcal{B}} = [\vec{w}]_{\mathcal{C}}$

On a

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{P_{\mathcal{C}\mathcal{B}}} \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}}_{[\vec{w}]_{\mathcal{B}}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } [\vec{w}]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

On aurait aussi pu trouver  $P_{\mathcal{BC}}$  et résoudre un système, sauf que c'est plus compliqué car il faut retrouver une matrice.

On aura alors que les vecteurs  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$ , exprimés dans la base canonique, sont donnés par :

$$\begin{aligned} [\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} &\Rightarrow \vec{v} = 3\vec{b}_1 + 3\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \\ [\vec{w}]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} &\Rightarrow \vec{w} = \vec{c}_1 - 4\vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### Exemple : une alternative

Soient  $V$  un espace vectoriel et  $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$  et  $\mathcal{C} = (c_1, c_2)$  deux bases de  $V$ .

Supposons que  $c_1 = b_1 + 2b_2$  et  $c_2 = b_1 + b_2$ . On en déduit les coordonnées des vecteurs de  $\mathcal{C}$  dans la base  $\mathcal{B}$  :  $[c_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $[c_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Donc, la matrice changement de bases (coordonnées) de  $\mathcal{C}$  vers  $\mathcal{B}$  est :

$$P_{\mathcal{BC}} = ([c_1]_{\mathcal{B}} \quad [c_2]_{\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Elle s'obtient facilement dans ce cas, car on a directement les colonnes.

Soit  $v \in V$ , avec  $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ . On cherche les coordonnées  $[v]_{\mathcal{C}}$ . On a  $P_{\mathcal{BC}}[v]_{\mathcal{C}} = [v]_{\mathcal{B}}$ .

On résout le système linéaire augmenté :

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{array} \right) \Rightarrow [v]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La matrice  $P_{\mathcal{BC}}$  s'obtient facilement, mais est-ce qu'on arrive à trouver  $P_{\mathcal{CB}}$ ?

Si on avait  $P_{\mathcal{CB}}$ , on pourrait considérer l'équation suivante, avec  $[v]_{\mathcal{C}}$  est l'inconnue :

$$P_{\mathcal{CB}}[v]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{C}}$$

et on devrait juste faire une multiplication matrice-vecteur.

Le **problème** est que la matrice  $P_{\mathcal{CB}} = ([b_1]_{\mathcal{C}} \quad [b_2]_{\mathcal{C}})$  n'est pas facile à trouver.

Par contre  $P_{\mathcal{BC}} = ([c_1]_{\mathcal{B}} \quad [c_2]_{\mathcal{B}})$  est inversible car :

- $(c_1, c_2)$  est une base de  $V$ , donc  $(c_1, c_2)$  est une famille linéairement indépendante ;
- $[\cdot]_{\mathcal{B}}$  est un isomorphisme, donc préserve les relations d'indépendance linéaire.
- les colonnes sont linéairement indépendantes, la matrice est carrée, donc inversible.

Donc  $[c_1]_{\mathcal{B}}$  et  $[c_2]_{\mathcal{B}}$  sont linéairement indépendants, et donc  $P_{\mathcal{BC}}$  est inversible.

On a alors que l'équation de changement de base  $P_{\mathcal{BC}}[v]_{\mathcal{C}} = [v]_{\mathcal{B}}$ , devient (on multiplie par l'inverse de  $P_{\mathcal{BC}}$  à gauche) :

$$\underbrace{P_{\mathcal{BC}}^{-1} P_{\mathcal{BC}}}_{=I_2} [v]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{BC}}^{-1} [v]_{\mathcal{B}}$$

Donc  $P_{\mathcal{BC}}^{-1}[v]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{C}}$

Si on met nos différentes équations de changement de base ensemble, on obtient

$$P_{\mathcal{BC}}^{-1}[v]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{CB}}[v]_{\mathcal{B}}$$

Comme  $P_{\mathcal{BC}}^{-1}[v]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{CB}}[v]_{\mathcal{B}}$  pour tout vecteur  $v \in V$ , on conclut que :

$$P_{\mathcal{CB}} = P_{\mathcal{BC}}^{-1}$$

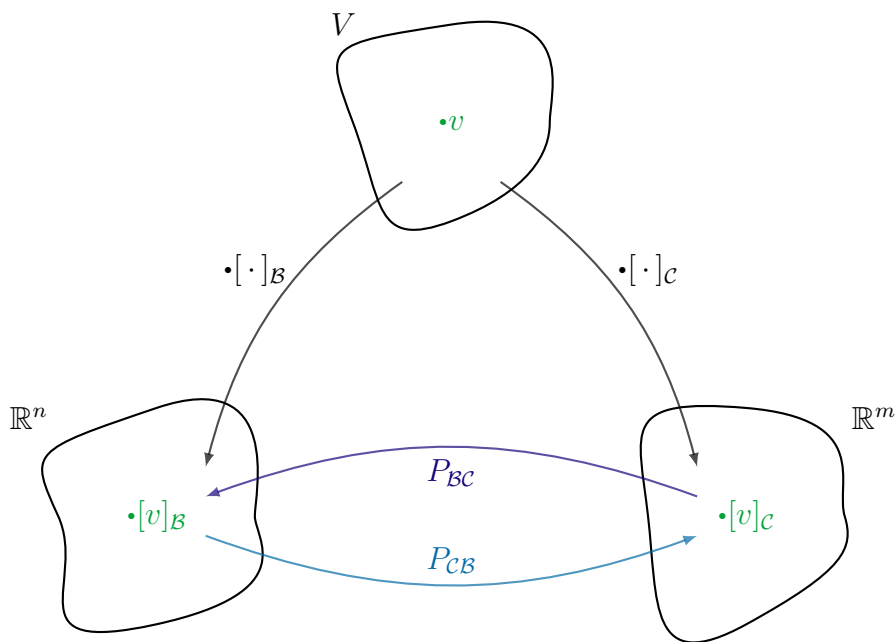
Pour finir avec notre exemple, on a

$$P_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et } P_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

et  $[v]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

## Changement de bases et $[\cdot]_{\mathcal{B}}$

Soit  $V$  un espace vectoriel et soient  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  deux bases de  $V$  avec  $n$  éléments.



On a

$P_{\mathcal{CB}}$  : matrice de changement de bases de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{C}$  :  $P_{\mathcal{CB}}[v]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{C}}$

$P_{\mathcal{BC}}$  : matrice de changement de bases de  $\mathcal{C}$  à  $\mathcal{B}$  :  $P_{\mathcal{BC}}[v]_{\mathcal{C}} = [v]_{\mathcal{B}}$

De plus les matrices sont inversibles et  $P_{\mathcal{CB}} = P_{\mathcal{BC}}^{-1}$

**Théorème 4.34.** Soient  $V$  un espace vectoriel,  $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  et  $\mathcal{C} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$  deux bases de  $V$ . Alors il existe une unique matrice  $P_{\mathcal{CB}}$  de taille  $n \times n$  telle que  $P_{\mathcal{CB}}[v]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{C}}$  avec

$$P_{\mathcal{CB}} = ([b_1]_{\mathcal{C}} \dots [b_n]_{\mathcal{C}})$$

De plus la matrice est inversible, d'inverse  $P_{\mathcal{BC}}$  donnée par

$$P_{\mathcal{BC}} = ([c_1]_{\mathcal{B}} \dots [c_n]_{\mathcal{B}})$$

## 4.5 Dimension d'un espace vectoriel

On sait que si  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\vec{v}$  a  $n$  composantes  $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ . On sait que si  $\vec{v} \in V$ ,  $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  on a  $[v]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^n$

**Théorème 4.35.** *Soient  $V$  un espace vectoriel et  $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$  une base de  $V$ . Alors toute famille d'éléments de  $V$  avec plus de  $n$  éléments sera linéairement dépendante.*

*Remarque:* si la famille possède moins de  $n$  éléments ou alors exactement  $n$  éléments, on ne sait pas si elle est linéairement indépendante ou non, il faut le montrer en utilisant la définition ??.

**Théorème 4.36.** *Soient  $V$  un espace vectoriel et  $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$  une base de  $V$ . Alors toute autre base de  $V$  possède exactement  $n$  éléments.*

**Définition 4.37** (dimension).

Soit  $V$  un espace vectoriel.

1. si  $V$  a une famille génératrice avec un nombre fini d'éléments, on dira que  $V$  est de dimension finie. On note sa dimension avec  $\dim V$  et  $\dim V$  est égal au nombre d'éléments dans chaque base de  $V$  (chaque base aura le même nombre d'éléments).
2. si  $V$  n'admet pas de famille génératrice finie, on dira que  $V$  est de dimension infinie. Dans ce cas  $\dim V = \infty$
3. si  $V = \{0_V\}$  on a  $\dim V = 0$ .

**Exemple 4.38.**

- $\dim \mathbb{R}^n = n$
- $\dim \mathbb{P}_2 = 3$  (base canonique est  $(1, t, t^2)$  avec 3 éléments)
- $\dim \mathbb{P}_n = n + 1$
- $\dim \mathbb{P} = \infty$
- $\dim M_{2 \times 2} = 4$ .

**Théorème 4.39** (Base incomplète).

*Soient  $V$  un espace vectoriel de dimension finie et  $W$  un sous-espace vectoriel de  $V$ . Alors toute famille d'éléments linéairement indépendants de  $W$  peut être complétée en une base de  $W$ . On a  $\dim W \leq \dim V$  et  $W$  est de dimension finie.*

**Exemple 4.40.**

Soit  $V = \mathbb{R}^3$  et  $W$  est le plan  $O_{xy}$  de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\dim W = 2$  car c'est un plan. Soit  $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$ . La famille  $\{\vec{w}\}$  est linéairement indépendante, car  $\vec{w} \neq \vec{0}$  mais ce n'est pas une base de  $W$ . Il faut compléter la famille avec un deuxième vecteur de  $W$ . On peut prendre  $\vec{e}_1$  et la famille  $\{\vec{e}_1, \vec{w}\}$  est une base de  $W$ . On a  $\dim W = 2$  et  $\dim V = 3$ .

**Théorème 4.41** (Théorème de la base). *Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension finie,  $\dim V = n$ ,  $n \geq 1$ . Alors*

1. toute famille génératrice de  $V$  d'exactly  $n$  éléments est une base de  $V$ ,
2. toute famille linéairement indépendante d'exactly  $n$  éléments de  $V$  est une base de  $V$ .

## Dimension de $\text{Ker}(A)$ et de $\text{Im}(A)$

Soit  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  avec  $A = (\vec{a}_1 \vec{a}_2 \dots \vec{a}_n)$ , avec  $\vec{a}_i \in \mathbb{R}^m$ .

- 1)  $\text{Im}(A) = \text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$ . On a  $\dim \text{Im}(A) \leq m$ . Comme  $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$  n'est pas forcément linéairement indépendante, on doit trouver les colonnes pivots de  $A$  pour avoir une base de l'image de  $A$  :

$$\dim \text{Im}(A) = \text{nombre de colonnes pivots}$$

- 2)  $\text{Ker}(A) = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{v} = \vec{0}\} \subseteq \mathbb{R}^n$  donc  $\dim \text{Ker}(A) \leq n$ . Le nombre d'éléments dans une base du noyau  $\text{Ker}(A)$  est égal au nombre de variables libres, donc aux colonnes non-pivots :

$$\dim \text{Ker}(A) = \text{nombre de colonnes non-pivots.}$$

### Définition 4.42 (rang).

Soient  $V, W$  des espaces vectoriels et soit  $T : V \rightarrow W$  une transformation linéaire. On appelle *rang* de  $T$ , la dimension de  $\text{Im}(T)$ . On a

$$\text{rang}(T) = \dim \text{Im}(T)$$

Si  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  linéaire, il existe une unique matrice  $A$  telle que  $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ . On a  $\text{Im}(T) = \text{Im}(A)$  et alors  $\text{rang}(T) = \text{rang}(A)$ . On parlera alors du rang de la matrice  $A$ .

### Exemple 4.43.

Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ . On a  $A \sim \dots \sim \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 0 & 0 & -4 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & -1 \end{pmatrix}$ .

On a  $\text{rang}(A) = 3$  et  $\dim \text{Ker}(A) = 1$  et aussi

$$\begin{aligned} \text{Im}(A) &= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \\ \text{Ker}(A) &= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

### Théorème 4.44 (Du rang).

1. Soit  $A$  une matrice  $m \times n$ . Alors

$$\dim \text{Ker}(A) + \text{rang}(A) = n$$

2. Soit  $T : V \rightarrow W$  où  $V, W$  sont des espaces vectoriels avec  $\dim V = n$ , alors

$$\dim \text{Ker}(T) + \text{rang}(T) = n$$

**Exemple 4.45.**

Si  $A$  est une matrice  $6 \times 7$  et  $\dim \text{Ker}(A) = 3$  on a  $\text{rang}(A) = 4$  car

$$\dim \text{Ker}(A) + \text{rang}(A) = 7$$

**Théorème 4.46** (Suite du théorème 2.30). Soit  $A$  une matrice  $n \times n$ . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.

1.  $A$  est inversible
2.  $\text{rang}(A) = n$ . On dira que  $A$  est de rang plein (full rank)
3.  $\dim \text{Ker}(A) = 0$
4.  $\det(A) \neq 0$

## Espaces des lignes de $A$ et $A^\top$

Dans cette partie on essaie de savoir si deux familles de vecteurs engendrent le même espace vectoriel.

Soit  $A$  une matrice de taille  $m \times n$ , donnée par  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

On a vu qu'on pouvait décomposer  $A$  en lignes

$$A = \begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \end{matrix} \quad \text{et} \quad A^\top = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

On a  $\text{lg}n_1(A)^\top, \text{lg}n_2(A)^\top, \dots, \text{lg}n_m(A)^\top \in \mathbb{R}^n$  (la transposée des lignes nous donne des vecteurs colonnes).

**Définition 4.47** (Espace des lignes).

L'espace engendré par les lignes de  $A$  s'appelle *l'espace des lignes* et il est défini par

$$\text{Lgn}(A) = \text{span}\{\text{lg}n_1(A)^\top, \text{lg}n_2(A)^\top, \dots, \text{lg}n_m(A)^\top\}$$

On a  $\text{Lgn}(A) \subseteq \mathbb{R}^n$  et c'est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ .

*Remarque:* on a  $\text{Lgn}(A) = \text{Im}(A^\top)$

**Théorème 4.48.** Soit  $A$  une matrice  $m \times n$  alors

$$\dim \text{Lgn}(A) = \dim \text{Im}(A)$$

*Autrement dit*

$$\text{rang}(A^\top) = \text{rang}(A)$$

**Exemple 4.49.**

Soit  $A$  une matrice  $3 \times 2$  donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vérifions le théorème précédent. On a  $\text{rang}(A) = 2$  et  $\text{Im}(A) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$ . On

a

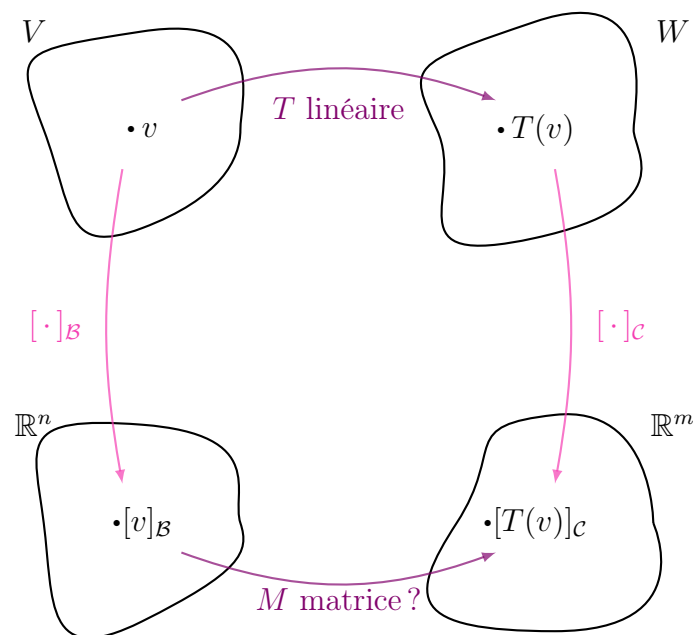
$$A^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

avec  $\text{rang}(A^\top) = 2$  et  $\text{Im}(A^\top) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$  (ici c'est égal  $\mathbb{R}^2$ ).

On a bien  $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^\top)$  mais on a  $\text{Im}(A) \neq \text{Im}(A^\top)$ ,  $\text{Ker}(A) \neq \text{Ker}(A^\top)$  et  $\dim \text{Ker}(A) \neq \dim \text{Ker}(A^\top)$ .

**Théorème 4.50.** *Si  $A$  est équivalente selon les lignes à  $B$  alors leurs espaces des lignes engendrent le même espace. Si  $B$  est sous forme échelonnée-réduire, ses lignes non-nulles forment une base de  $\text{Lgn}(A)$ .*

## 4.6 Matrices d'application et changement de bases



Soient

$\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  une base de  $V$

$\mathcal{C} = (c_1, c_2, \dots, c_m)$  une base de  $W$

On rappelle que si  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  est linéaire, il existe une unique matrice  $A$  de taille  $m \times n$  telle que

$$T(\vec{v}) = A\vec{v}$$

La matrice  $A$  est donnée par

$$A = (T(\vec{e}_1), T(\vec{e}_2) \cdots T(\vec{e}_n))$$

**Cas général :** Soit  $v \in V$ , il existe  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  tels que  $v = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$  et  $[v]_{\mathcal{B}} =$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

On a, par la linéarité de  $T$  :

$$\begin{aligned} T(v) &= T(\alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n) \\ &= \alpha_1 T(b_1) + \cdots + \alpha_n T(b_n) \in W \end{aligned}$$

On applique  $[\cdot]_{\mathcal{C}}$  des deux côtés, c'est-à-dire on fait apparaître  $[T(v)]_{\mathcal{C}}$  :

$$\begin{aligned} [T(v)]_{\mathcal{C}} &= [\alpha_1 T(b_1) + \cdots + \alpha_n T(b_n)]_{\mathcal{C}} \\ &= \alpha_1 [T(b_1)]_{\mathcal{C}} + \cdots + \alpha_n [T(b_n)]_{\mathcal{C}} \\ &= ([T(b_1)]_{\mathcal{C}} \quad \cdots \quad [T(b_n)]_{\mathcal{C}}) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \\ &= M[v]_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

On a fait apparaître une matrice  $M$  de taille  $m \times n$  donnée par

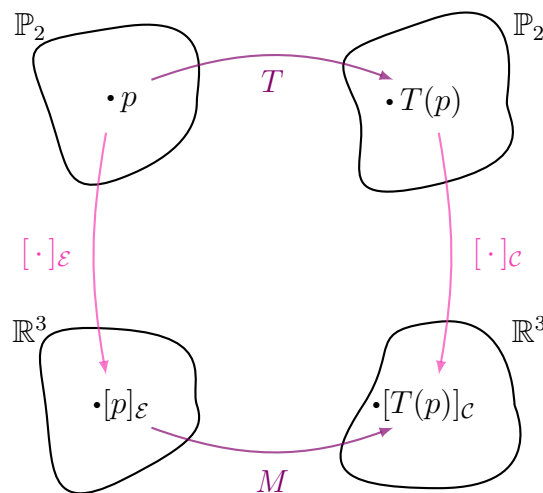
$$M = ([T(b_1)]_{\mathcal{C}} \quad \cdots \quad [T(b_n)]_{\mathcal{C}}) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

On obtient  $[T(v)]_{\mathcal{C}} = M[v]_{\mathcal{B}}$ . On dira que  $M$  représente  $T$  dans les bases  $\mathcal{B}$  (de départ) et  $\mathcal{C}$  (d'arrivée).

*Remarque:* La matrice  $M$  n'est pas une matrice de changement de bases! Mais pour obtenir  $M$  il faudra des fois utiliser des matrices de changements de bases, car les colonnes de  $M$  sont données par  $[T(b_i)]_{\mathcal{C}}$ .

#### Exemple 4.51.

Soient  $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$  et  $\mathcal{C} = (t, t+1, t^2)$  deux bases de  $\mathbb{P}_2$ .



avec  $T(p) = a_1 + 2a_2 t$ . Ici  $T$  est l'application "dérivée". On cherche  $M$  qui représente  $T$  dans les bases  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{C}$ .

$$[T(p)]_{\mathcal{C}} = M[p]_{\mathcal{E}}$$

et  $M = ([T(1)]_{\mathcal{C}} \quad [T(t)]_{\mathcal{C}} \quad [T(t^2)]_{\mathcal{C}})$

On a  $T(1) = 0$ ,  $T(t) = 1$  et  $T(t^2) = 2t$ . On cherche  $[\cdot]_{\mathcal{C}}$  :

$$[T(1)]_{\mathcal{C}} = [0]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[T(t)]_{\mathcal{C}} = [1]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[T(t^2)]_{\mathcal{C}} = [2t]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On obtient

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On voit que  $M$  n'est pas inversible car ses colonnes ne sont pas linéairement indépendantes (ou que son déterminant vaut 0).

#### Exemple 4.52.

Exemple additionnel voir moodle. Soit  $T : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_2$  qui envoie une matrice  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  sur

$$T(A) = a + (b + c)t + dt^2$$

Trouver  $M$  qui représente  $T$  dans les bases  $\mathcal{E}$ , base canonique de  $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{C} = (1, 1 + t, t^2)$ .

*Remarque:* Si  $T : V \rightarrow V$  est l'application identité, alors  $M$  sera une matrice de changements de bases (et donc inversible).

#### Exemple 4.53.

Soit  $T$  l'application linéaire définie par

$$T : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} d & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

avec

$$\mathcal{E} = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\mathcal{C} = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

On cherche  $M$  telle que  $[T(A)]_c = M[A]_\varepsilon$  pour tout  $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ .  $M$  est donnée par

$$\begin{aligned} M &= \left( \left[ T \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \right]_c \quad \left[ T \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \right]_c \quad \left[ T \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \right]_c \quad \left[ T \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \right]_c \right) \\ &= \left( \left[ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]_c \quad \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_c \quad \left[ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_c \quad \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_c \right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et  $M$  est singulière.

Supposons maintenant que  $T$  est l'application identité.  $T(A) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . On a  $[T(A)]_c = P[A]_\varepsilon$ .

$$\begin{aligned} P &= \left( \left[ T \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \right]_c \quad \left[ T \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \right]_c \quad \left[ T \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \right]_c \quad \left[ T \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \right]_c \right) \\ &= \left( \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_c \quad \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_c \quad \left[ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]_c \quad \left[ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]_c \right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et la matrice  $P$  est inversible et c'est une matrice de changement de base (il s'agit de  $P_{c\varepsilon}$ )

## Chapitre 5 : Vecteurs propres et valeurs propres

Le but du chapitre est d'étudier  $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On retrouve cela lors de l'étude des systèmes dynamiques (dans lesquels on fera apparaître  $A^k$ ).

**Exemple 5.1.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \text{ alors } A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } A \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ou encore :

$$A \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Cependant :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Donc  $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$  pour certains  $\vec{v}$  et certains  $\lambda$ .

**Définition 5.2** (vecteur propre).

Soit  $A$  une matrice  $n \times n$ . Alors  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  est un *vecteur propre* de  $A$  si

- $\vec{v} \neq \vec{0}$ , et
- il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ .

On appelle  $\lambda$  la valeur propre associée à  $\vec{v}$ .

*Remarque:* La valeur propre  $\lambda$  peut être nulle. Par contre  $\vec{v} = \vec{0}$  n'est pas un vecteur propre (même si  $A\vec{0} = \vec{0}$ )

**Suite de l'exemple 5.1.** Trouvons tous les vecteurs et valeurs propres de  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ . On doit résoudre  $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$  :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{cases} v_1 + 3v_2 = \lambda v_1, \\ 2v_1 + 2v_2 = \lambda v_2. \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (1 - \lambda)v_1 + 3v_2 = 0, \\ 2v_1 + (2 - \lambda)v_2 = 0. \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 - \lambda & 3 & 0 \\ 2 & 2 - \lambda & 0 \end{array} \right) \leftarrow \text{Système homogène } (*) \end{aligned}$$

Pour trouver un vecteur propre, il faut que (\*) admette une solution non triviale ( $\neq \vec{0}$ ).

Donc que  $(A - \lambda I_2)\vec{x} = \vec{0}$  admette une solution non triviale. Autrement dit :

$$\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid (A - \lambda I_2)\vec{x} = 0\}$$

contienne un vecteur non-nul, c'est-à-dire :

$$\text{Ker}(A - \lambda I_2) \neq \{\vec{0}\}.$$

On va chercher une condition pour trouver des  $\lambda$  qui vérifient  $\text{Ker}(A - \lambda I_2) \neq \{\vec{0}\}$ .

On a  $\dim \text{Ker}(A - \lambda I_2) \neq 0$ .

Par le théorème 4.46,  $A - \lambda I_2$  est singulière donc  $\boxed{\det(A - \lambda I_2) = 0}$ .

On a que  $\det(A - \lambda I_2) = 0$  est une équation d'inconnue  $\lambda$ .

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ 2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(2 - \lambda) - 6 = (\lambda - 4)(\lambda + 1)$$

Ainsi :

$$\det(A - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{4, -1\}.$$

On a trouvé deux valeurs propres : 4 et -1.

Pour  $\lambda = -1$  : On considère  $(A - \lambda I_2)\vec{v} = 0$ , avec  $\lambda = -1$  :

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (A - (-1)I_2)\vec{v} = 0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \vec{s} = t \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, &t \in \mathbb{R}^* \quad (\text{on ne veut pas } \vec{s} = \vec{0}). \end{aligned}$$

Pour  $\lambda = 4$  : On considère  $(A - 4I_2)\vec{v} = 0$  :

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \vec{s} = t \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, &t \in \mathbb{R}^*. \end{aligned}$$

Donc :

$$\{\vec{v} \in \mathbb{R}^2 \mid \vec{v} = t \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}^*\}$$

est l'ensemble des vecteurs propres associés à  $\lambda = -1$ .

Comme  $\vec{0} \notin$  à cet ensemble, ce n'est pas un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^2$ . On ne peut pas non plus l'écrire avec un "span".

On le complète donc avec  $\vec{0}$  pour obtenir un sous-espace vectoriel. On définit alors l'espace propre associé à  $\lambda = -1$  par :

$$E_{-1} = \underbrace{\left\{ \vec{v} \in \mathbb{R}^2 \mid \vec{v} = t \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}^* \right\}}_{\text{vecteurs propres}} \cup \underbrace{\{\vec{0}\}}_{\text{pas un vecteur propre!}}.$$

On a donc :

$$E_{-1} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \text{sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^2.$$

**Résumé :**  $A$  est  $n \times n$ . On cherche  $\lambda \in \mathbb{R}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n, \vec{v} \neq \vec{0}$  tel que :  $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$

① On trouve  $\lambda$  :  $\det(A - \lambda I) = 0$ , on résout

② On trouve  $\vec{v}$  : on résout  $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$ , les solutions non-nulles sont les vecteurs propres.

L'espace propre  $E_\lambda$  est un sous-EV de  $\mathbb{R}^n$

**Définition 5.3** (espace propre).

Soit  $A$  une matrice  $n \times n$ . Alors  $E_\lambda$  est l'espace propre associé à  $\lambda$ . Il est défini par

$$E_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda I)$$

C'est-à-dire :

$$E_\lambda = \{\text{vecteurs propres associés à } \lambda\} \cup \{\vec{0}\}$$

**Théorème 5.4.** Soit  $A$  une matrice  $n \times n$ . Alors  $\lambda$  est une valeur propre si et seulement si

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

**Définition 5.5** (équation et polynôme caractéristique).

Soit  $A$  une matrice  $n \times n$ . L'équation  $\det(A - \lambda I_n) = 0$  s'appelle l'équation caractéristique de  $A$ . On pose

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

C'est un polynôme de degré  $n$  appelé le polynôme caractéristique.

En effet :  $\det(A - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$  (les éléments sur la diagonale seront multipliés entre eux)

On obtient un polynôme de degré  $n$  (avec  $\lambda^n$ )

*Remarque:* On cherchera les racines du polynômes  $p_A(\lambda)$ . Les racines peuvent être complexes ou réelles.

**Exemple 5.6.**

- 1)  $p_A(\lambda) = \lambda^3 + \lambda = \lambda(\lambda^2 + 1) = \lambda(\lambda + i)(\lambda - i)$ . On a  $\lambda \in \{0, i, -i\}$  on a trois racines, dont deux racines complexes.
- 2)  $p_A(\lambda) = \lambda^2 + 7\lambda + 12 = (\lambda + 1)(\lambda + 3)$ . On factorise rapidement en utilisant la propriété que  $7 = 4 + 3$  et  $12 = 4 \cdot 3$ . On a deux racines réelles  $\lambda = -4$  et  $\lambda = -3$ .

**Théorème 5.7.** Une matrice  $A$  de taille  $n \times n$  admet au plus  $n$  valeurs propres distinctes.

En effet,  $p_A(\lambda)$  est un polynôme de degré  $n$  et admet  $n$  racines.

Elles peuvent être réelles, complexes, distinctes ou égales.

**Définition 5.8** (multiplicité (algébrique)).

On appelle la *multiplicité* (ou *multiplicité algébrique*) d'une valeur propre sa multiplicité en tant que racine de  $p_A(\lambda)$ .

Multiplicité = nombre de fois que  $\lambda$  apparaît en tant que racine.

**Exemple 5.9.**

1)  $p_A(\lambda) = (1 - \lambda)(2 - \lambda)(2 + \lambda) \Rightarrow \lambda \in \{1, 2, -2\} \Rightarrow 3$  racines distinctes

2)  $p_A(\lambda) = (1 - \lambda)(2 + \lambda)^2 \Rightarrow \lambda \in \{1, -2\} \Rightarrow 2$  racines distinctes mais 3 racines. On a que -2 est de multiplicité 2.

3)  $p_A(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1 \Rightarrow \lambda \in \left\{ \frac{-1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \right\} \Rightarrow 2$  racines complexes distinctes

**Définition 5.10** (trace).

Soit  $A$  une matrice  $n \times n$ . On appelle la *trace* de  $A$  le nombre

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

La trace est la somme des éléments diagonaux.

**Exemple 5.11.**

1)  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \text{Tr}(A) = a_{11} + a_{22}.$

Calculons  $p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21}$

$\Rightarrow p_A(\lambda) = \lambda^2 - \underbrace{(a_{11} + a_{22})}_{\text{Tr}(A)} \lambda + \underbrace{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}_{\det(A)}$

2)  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$  On calcule  $p_A(\lambda)$ .

$\Rightarrow p_A(\lambda) = -\lambda^3 + \underbrace{(a_{11} + a_{22} + a_{33})}_{\text{Tr}(A)} \lambda^2 - (\dots)\lambda + \boxed{\det(A)}$

*Remarque:*

(a) on aura  $(-1)^n \lambda^n$

(b) on aura  $(-1)^{n-1} \text{Tr}(A) \lambda^{n-1}$

(c) on aura  $+\det(A)$  à la fin du polynôme caractéristique.

**▲** Ici on considère  $\det(A - \lambda I)$ . Si on considère  $\det(\lambda I - A)$ , on n'aura pas la même décomposition pour  $p_A(\lambda)$ .

$$3) A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ on a } p_A(\lambda) = (2 - \lambda)(1 - \lambda)(1 - \lambda)$$

$\Rightarrow \lambda \in \{1, 2\}$  avec  $\lambda = 1$  de multiplicité algébrique 2.

Trouvons les deux espaces propres associés,  $E_1$  et  $E_2$ .

Pour  $\lambda = 1$ ,  $E_1$  est donné par :

$$E_1 = \text{Ker}(A - I) : \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x_1 = x_3 = 0 \\ x_2 \text{ libre} \end{array}$$

$$\text{On a } \vec{s} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \Rightarrow E_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Pour  $\lambda = 2$ ,  $E_2$  est donné par :

$$E_2 = \text{Ker}(A - 2I) : \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x_2 = x_3 = 0 \\ x_1 \text{ libre} \end{array}$$

$$\text{On a } \vec{s} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \Rightarrow E_2 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$4) A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ on a } p_A(\lambda) = (2 - \lambda)(1 - \lambda)(1 - \lambda)$$

$\Rightarrow \lambda \in \{1, 2\}$  avec  $\lambda = 1$  de multiplicité algébrique 2. Trouvons les deux espaces propres associés,  $E_1$  et  $E_2$ .

Pour  $\lambda = 1$ ,  $E_1$  est donné par :

$$E_1 = \text{Ker}(A - I) : \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x_1 = 3x_3 \\ x_2, x_3 \text{ libres} \end{array}$$

$$\text{Donc } \vec{s} = t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t, r \in \mathbb{R} \Rightarrow E_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Pour  $\lambda = 2$ ,  $E_2$  est donné par :

$$E_2 = \text{Ker}(A - 2I) : \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x_2 = x_3 = 0 \\ x_1 \text{ libre} \end{array}$$

On a  $\vec{s} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $t \in \mathbb{R} \Rightarrow E_2 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

*Remarque:*  $A - \lambda I$  est une matrice singulière (non inversible) donc  $\text{rang}(A - \lambda I) < n$ , c'est-à-dire qu'on aura des variables libres et donc on n'obtient pas  $n$  colonnes pivots.

**Théorème 5.12.** Soit  $A$  une matrice  $n \times n$  avec  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  des valeurs propres distinctes ( $r \leq n$ ). Alors  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r$  des vecteurs propres associés à  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  sont linéairement indépendants.

*Remarque:*

1. Des vecteurs propres appartenant à des espaces propres différents sont linéairement indépendants.
2. Ce sera utile pour trouver une base de  $\mathbb{R}^n$  formée de vecteurs propres.

### Le cas particulier de $\lambda = 0$

Si  $\lambda = 0$ , on a  $A\vec{v} = \lambda\vec{v} = \vec{0}$  et il existe un vecteur propre  $\vec{v} \neq \vec{0}$  tel que  $A\vec{v} = \vec{0}$

Donc  $E_0 = \text{Ker}(A - 0I) \neq \{\vec{0}\}$ .

Or  $E_0 = \text{Ker}(A - 0I) = \text{Ker}(A)$ , donc on obtient  $\text{Ker}(A) \neq \{\vec{0}\}$ .

Donc  $A$  est singulière.

**Théorème 5.13.** Soit  $A$  une matrice  $n \times n$ .  $\lambda = 0$  est une valeur propre si et seulement si  $A$  est singulière.

Et  $\lambda = 0$  n'est pas une valeur propre  $\Leftrightarrow A$  est inversible

## 5.1 Matrices semblables

On commence par donner un exemple de deux matrices *semblables*, puis on donnera la définition.

$$\text{Soient } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On a } AP = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } PB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

On obtient  $AP = PB$ . Or la matrice  $P$  est inversible donc on peut isoler  $B$  et avoir une relation entre  $B$  et  $A$  :

$$B = P^{-1}AP$$

De même on peut isoler  $A$  :  $A = PBP^{-1}$

De plus, si on compare les polynômes caractéristiques, on aura que

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= (1 - \lambda)(4 - \lambda) + 12 \\ p_B(\lambda) &= (1 - \lambda)(4 - \lambda) + 12 \end{aligned} \quad \text{sont les mêmes.}$$

On dira que  $A$  et  $B$  sont semblables.

**Définition 5.14** (semblables).

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices  $n \times n$ . S'il existe une matrice  $P$  inversible telle que

$$B = P^{-1}AP$$

on dira que  $A$  est *semblable* à  $B$ .

*Remarque:* On choisit de mettre  $P^{-1}$  en premier dans la définition 5.14.

On a que  $A$  est semblable à  $B$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow B = P^{-1}AP \\ &\Leftrightarrow PBP^{-1} = A \\ &\Leftrightarrow (P^{-1})^{-1}BP^{-1} = A \\ &\Leftrightarrow Q^{-1}BQ = A \quad (\text{avec } Q = P^{-1}) \\ &\Leftrightarrow B \text{ est semblable à } A \end{aligned}$$

Résumé :  $A$  est semblable à  $B \Leftrightarrow B$  est semblable à  $A$

Pour savoir si deux matrices sont semblables on doit trouver  $P$  inversible telle que

$$AP = PB \quad \text{ou} \quad B = P^{-1}AP$$

*Remarque:* Montrer que deux matrices sont semblables n'est en général pas facile. Car il faut trouver une matrice  $P$  inversible telle que  $AP = PB$ , et cela n'est pas facile.

**Théorème 5.15.** *Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique et les mêmes valeurs propres*

*Remarque:* Mais, avoir les mêmes valeurs propres et le même polynôme caractéristique n'implique pas que les matrices soient semblables.

On rappelle qu'on a déjà vu une autre relation entre les matrices, celle d'équivalence (selon les lignes). Être équivalente selon les lignes et semblables sont deux notions qui n'ont pas de rapport entre les deux. On voit cela dans l'exemple ci-dessous.

**Exemple 5.16.**

$$1) \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_A \text{ et } \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_B \text{ ne sont pas semblables.}$$

Mais  $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$  et les valeurs propres sont les mêmes ( $\lambda = 2$ ).

On a par contre A et B sont équivalentes (selon les lignes) car  $A \sim B$  avec des opérations élémentaires sur les lignes.

$$2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ sont semblables mais elles ne sont pas équivalentes (selon les lignes).}$$

$$3) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ sont semblables et équivalentes (selon les lignes).}$$

$$4) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ne sont pas semblables ni équivalentes selon les lignes.}$$

Donc

- semblables n'implique pas être équivalentes selon les lignes
- équivalentes selon les lignes n'implique pas être semblables

## 5.2 Diagonalisation

Le but est de trouver  $P$  une matrice  $n \times n$  inversible, telle que  $P^{-1}AP$  soit une matrice diagonale. On pourra ensuite utiliser cela pour calculer  $A^k$  pour notre matrice  $A$ .

C'est-à-dire

$$D = P^{-1}AP \text{ et donc } A \text{ est semblable à } D$$

avec  $D$  diagonale.

On aura  $A = PDP^{-1}$  et

$$\begin{aligned} A^k &= (PDP^{-1})^k \\ &= PD \underbrace{P^{-1}P}_{I_n} D \underbrace{P^{-1}P}_{I_n} \dots \underbrace{P^{-1}P}_{I_n} DP^{-1} \\ &= PD^k P^{-1} \end{aligned}$$

On obtient  $A^k = PD^k P^{-1}$ , et comme  $D$  est diagonale,  $D^k$  s'obtient facilement

$$D^k = \begin{pmatrix} d_{11}^k & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & d_{22}^k & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & d_{nn}^k \end{pmatrix}$$

Ainsi  $A^k$  sera facile à calculer !

**Définition 5.17** (matrice diagonalisable).

Soit  $A$  une matrice  $n \times n$ . Si  $A$  est semblable à  $D$  une matrice diagonale, alors on dira qu'elle est *diagonalisable*. Dans ce cas on aura

$$D = P^{-1}AP \text{ et } A = PDP^{-1}$$

*Remarque:* Toutes les matrices ne sont pas diagonalisables. On pourra diagonaliser seulement une petite partie des matrices.

**Théorème 5.18** (critère de diagonalisation). *Soit  $A$  une matrice  $n \times n$ .  $A$  est diagonalisable si et seulement si elle admet  $n$  vecteurs propres linéairement indépendants.*

### Dans la pratique

- On cherche les valeurs propres, puis les espaces propres et les vecteurs propres.
- Si on obtient  $n$  vecteurs propres linéairement indépendants  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ , on peut construire une matrice  $P$  avec  $P = (\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \dots \ \vec{v}_n)$  (donc les vecteurs  $\vec{v}_i$  sont les colonnes de  $P$ ) et une matrice  $D$  diagonale

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

On a  $A\vec{v}_i = \lambda_i\vec{v}_i$  et  $D$  est diagonale et  $P$  est inversible. En effet  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$  sont linéairement indépendants donc on aura que  $P$  possède 1 pivot par colonne.

De plus la famille  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$  est une base de  $\mathbb{R}^n$ , formée de vecteurs propres de  $A$ .

Ceci découle du théorème 4.41 (le théorème de la bases). On a  $\dim \mathbb{R}^n = n$  et la famille contient  $n$  vecteurs linéairement indépendants, donc c'est une base.

**Exemple 5.19.**

1)  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda \in \{1, 2\}$ ,  $\lambda = 1$  de multiplicité 2. On trouve les espaces propres :

$$E_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad E_2 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

On n'arrive pas à trouver trois vecteurs propres linéairement indépendants. On ne pourra en trouver que deux :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc  $A$  n'est pas diagonalisable.

2)  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda \in \{1, 2\}$ ,  $\lambda = 1$  de multiplicité 2. On trouve les espaces propres :

$$E_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad E_2 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

On aura 3 vecteurs propres linéairement indépendants :

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc  $A$  est diagonalisable.

On a  $D = P^{-1}AP$  avec :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**▲** Il faut suivre l'ordre choisi des valeurs propres pour les colonnes de  $P$  et mettre les vecteurs propres correspondants aux valeurs propre dans  $D$ . On aura plusieurs diagonalisations !

$$3) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

on calcule  $p_a(\lambda) = \det(A - \lambda I) \Rightarrow p_a(\lambda) = \dots = (1 - \lambda)(\lambda + 2)^2 \Rightarrow \lambda \in \{1, -2\}$  avec  $\lambda = -2$  de mult. 2.

On trouve  $E_1$  et  $E_2$  :

$$E_{-2} = \text{Ker}(A + 2I) : A = \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 3 & 0 \\ -3 & -3 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} x_1 \text{ principale} \\ x_2, x_3 \text{ libres} \end{array}$$

$$\text{On a } x_1 = -x_2 = -x_3 \Leftrightarrow \vec{s} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t, r \in \mathbb{R}$$

Donc

$$E_{-2} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$E_1 = \text{Ker}(A - I) : \text{on trouve } E_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

On a 3 vecteurs propres linéairement indépendants donc  $A$  est diagonalisable.

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On pourrait aussi prendre

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ou encore

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Dans la dernière diagonalisation, on a pris deux autres vecteurs propres : ici les 2 vecteurs associées à  $\lambda = -2$  ont été multipliés respectivement par  $-1$  et  $2$ .

$$4) A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice supplémentaire sur le moodle.

## Résumé

$A$  diagonalisable  $\Leftrightarrow A$  possède  $n$  vecteurs propres linéairement indépendants.  
Et donc il existe une base de  $\mathbb{R}^n$  formée de vecteurs propres de  $A$ .

On a aussi :

$A$  possède  $r$  valeurs propres distinctes  $\Rightarrow A$  possède au moins  $r$  vecteurs propres linéairement indépendants.

**Théorème 5.20.** *Soit  $A$  une matrice  $n \times n$ . Si  $A$  possède  $n$  valeurs propres distinctes alors  $A$  est diagonalisable.*

Mais :  $A$  diagonalisable  $\not\Rightarrow n$  valeurs propres distinctes.

$A$  possède  $r < n$  valeurs propres distinctes  $\not\Rightarrow A$  pas diagonalisable. (dans ce cas, on doit trouver les espaces propres pour voir si on a le bon nombre de vecteurs propres linéairement indépendants)

**Théorème 5.21.** *Soit  $A$  une matrice  $n \times n$ . Si  $p_A(\lambda)$  admet  $n$  racines comptées avec leur multiplicité, alors  $A$  est diagonalisable  $\Leftrightarrow \dim E_{\lambda_i} = m_i$  pour toutes les valeurs propres distinctes, où  $m_i = \text{mult. algébrique de } \lambda_i$*

### Exemple 5.22.

Considérons les valeurs propres suivantes :

$$\lambda \in \{1, 2, 1, 4, 1, 2\}.$$

On a 6 valeurs propres au total, et 3 valeurs propres distinctes : 1, 2, 4.

Les multiplicités algébriques sont données par :

$$\begin{aligned}\lambda = 1, & \text{ multiplicité algébrique } 3, \\ \lambda = 2, & \text{ multiplicité algébrique } 2, \\ \lambda = 4, & \text{ multiplicité algébrique } 1.\end{aligned}$$

La matrice  $A$  est diagonalisable si et seulement si :

$$\begin{aligned}\dim E_1 &= 3, \\ \dim E_2 &= 2, \\ \dim E_4 &= 1.\end{aligned}$$

On appelle multiplicité géométrique de  $\lambda_i$  la dimension de l'espace propre  $E_{\lambda_i}$  :

$$\begin{aligned}m_i &= \text{multiplicité algébrique de } \lambda_i, \\ \dim E_{\lambda_i} &= \text{multiplicité géométrique de } \lambda_i.\end{aligned}$$

**Théorème 5.23.** *Soit  $A$  une matrice  $n \times n$ . Si  $A$  est symétrique, elle sera diagonalisable.*

*Remarque:* Si  $A$  est anti-symétrique, elle sera diagonalisable mais avec des valeurs propres et vecteurs propres complexes.

### 5.3 Applications linéaires et valeurs propres

Le but est de combiner la théorie sur les changements de bases et la théorie sur les matrices canoniquement associées à une application linéaire.

Soit  $T$  une application linéaire donnée par

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ \vec{x} &\mapsto A\vec{x} \end{aligned}$$

On a que  $A$  est la matrice canoniquement associée à  $T$  et donc représente  $T$  dans la base canonique. On aimerait représenter  $T$  avec une matrice diagonale, et voir  $T$  comme l'application  $\vec{u} \mapsto D\vec{u}$  avec  $D$  diagonale. On aura que  $D$  est une matrice qui représente  $T$  dans une certaine base (qu'on devra trouver).

**Théorème 5.24.** Soit  $A$  une matrice  $n \times n$  diagonalisable en  $D = P^{-1}AP$ . Soit  $\mathcal{B}$  la base de  $\mathbb{R}^n$  formée des colonnes de  $P$ . Soit  $T$  l'application linéaire donnée par

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ \vec{x} &\mapsto A\vec{x} \end{aligned}$$

Alors  $D$  est la matrice qui représente  $T$  dans la base  $\mathcal{B}$  (de départ) et  $\mathcal{B}$  (d'arrivée).

Si  $\mathcal{B} = (\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n)$  on a  $D = ([T(\vec{p}_1)]_{\mathcal{B}} \dots [T(\vec{p}_n)]_{\mathcal{B}})$

*Démonstration.* voir le cours □

**Exemple 5.25.**

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, \text{ on a } \lambda = \{3; 5\} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

On a  $A\vec{p}_1 = 5\vec{p}_1$ ,  $A\vec{p}_2 = 3\vec{p}_2$

Soit  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  et montrons que  $D = \underbrace{([T(\vec{p}_1)]_{\mathcal{B}} \ [T(\vec{p}_2)]_{\mathcal{B}})}_M$  avec  $\mathcal{B} = (\vec{p}_1, \vec{p}_2)$ .

$$\vec{x} \mapsto A\vec{x}$$

**Méthode 1** : avec les changements de bases

$$[T(\vec{p}_1)]_{\mathcal{B}} = P_{BE}[T(\vec{p}_1)]_E = P_{EB}^{-1}[T(\vec{p}_1)]_E = P_{EB}^{-1}A\vec{p}_1$$

et  $P_{EB}$  est facile à trouver :

$$P_{EB} = ([\vec{p}_1]_E \ [\vec{p}_2]_E) = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2) = P$$

Donc  $[T(\vec{p}_1)]_{\mathcal{B}} = P^{-1}A\vec{p}_1$ .

On calcule  $P^{-1}$  :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

et  $A\vec{p}_1 = 5\vec{p}_1$ .

On obtient

$$[T(\vec{p}_1)]_{\mathcal{B}} = 5 \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$[T(\vec{p}_2)]_{\mathcal{B}} = 3 \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } M = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = D$$

**Méthode 2 :**

avec la déf de  $[\cdot]_{\mathcal{B}}$ .

$$[T(\vec{p}_1)]_{\mathcal{B}} = [A\vec{p}_1]_{\mathcal{B}} = [5\vec{p}_1]_{\mathcal{B}}$$

On cherche les coefficients de la combinaison linéaire de  $5\vec{p}_1$  dans la base  $\mathcal{B}$  or

$$5\vec{p}_1 = 5 \cdot \vec{p}_1 + 0 \cdot \vec{p}_2$$

$$\Rightarrow [T(\vec{p}_1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Généralisation aux matrices semblables :**

Que faire si  $A$  n'est pas diagonalisable ?

Si elle est semblable à  $C$   $n \times n$  on aura

$$A = PCP^{-1}$$

et si  $C$  est "sympa" on pourra avoir  $A^k$  facilement.

**Exemple 5.26.**

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -9 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}, p_A(\lambda) = (\lambda + 2)^2 \Rightarrow \lambda = -2 \text{ de multiplicité } 2.$$

$$\text{On a } E_{-2} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Donc  $A$  n'est pas diagonalisable. On aura pas une base de  $\mathbb{R}^2$  formée de vecteurs propres de  $A$ . Il manque un vecteur propre.

On peut compléter  $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$  en une base de  $\mathbb{R}^2$  en ajoutant un vecteur.

Par exemple :  $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ . (Et  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  n'est pas un vecteur propre de  $A$ ).

$$\text{On pose } P = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, la matrice qui représente  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dans la base  $\mathcal{B} = (\vec{p}_1, \vec{p}_2)$  est  $C = P^{-1}AP$

$$\vec{x} \mapsto A\vec{x}$$

et elle est donnée par

$$C = ([T(\vec{p}_1)]_{\mathcal{B}} \quad [T(\vec{p}_2)]_{\mathcal{B}})$$

On a

$$[T(\vec{p}_1)]_{\mathcal{B}} = [A\vec{p}_1]_{\mathcal{B}} = [-2\vec{p}_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$[T(\vec{p}_2)]_{\mathcal{B}} = \left[ \begin{pmatrix} -9 \\ -8 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -9 \\ -8 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha = -3 \\ \beta = -2 \end{matrix}$$

Donc  $C = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ . Ici  $C$  est triangulaire supérieure et c'est déjà bien !

## Diagonalisation dans les complexes

L'exemple ci-dessous nous donne une diagonalisation dans les complexes, c'est-à-dire que les matrices auront des coefficients dans  $\mathbb{C}$

### Exemple 5.27.

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Trouvons  $\lambda$

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (2 - \lambda) \left( \left( \frac{1}{2} - \lambda \right) \left( \frac{1}{2} - \lambda \right) - \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) \\ &= (2 - \lambda) \left( \left( \frac{1}{2} - \lambda \right)^2 + \frac{3}{4} \right) \\ &= (2 - \lambda)(\lambda^2 - \lambda + 1) \end{aligned}$$

On obtient  $\lambda \in \left\{ 2; \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}; \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \right\}$

On a 3 valeurs propres distinctes de multiplicité algébrique 1, on a que  $\dim E_2 = 1$  et  $A$  n'est pas diagonalisable dans  $\mathbb{R}$  (c'est-à-dire avec des matrices à coefficients réels).

Cherchons les espaces propres  $E_{\lambda_i}$  :

$$E_2 = \text{Ker}(A - 2I) : \left( \begin{array}{ccc|c} \frac{3}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{On a } E_2 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$E_{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} = \left( \begin{array}{ccc|c} \frac{-\sqrt{3}i}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{-\sqrt{3}i}{2} & 0 \end{array} \right)$$

→  $x_2 = 0$ ,  $-ix_1 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -ix_3$  avec  $x_3$  libre.

On a  $E_{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ .

On fait de même pour  $E_{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$  et on obtient On a  $E_{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ .

On obtient

$$P = \begin{pmatrix} i & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

## Chapitre 6 : Orthogonalité et moindres carrés

### Objectifs.

- définir des produits scalaires et les calculer ;
- savoir si des vecteurs sont orthonogaux ;
- trouver le complément orthogonal à un sous-espace vectoriel.
- trouver la projection orthogonale, appliquer Gram-Schmidt
- résoudre des problème de moindres carrés.

**Rappel et but** Si  $A$  est  $n \times n$ , on a les équivalences suivantes, par les théorèmes 1.38, 2.30

- 1)  $A\vec{x} = \vec{b}$  est compatible,  $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^n$
- 2)  $\text{Im}(A) = \mathbb{R}^n$
- 3)  $A$  est inversible

Mais si  $A$  est singulière, donc non-inversible, on se retrouvera avec des équations  $A\vec{x} = \vec{b}$  incompatibles. Supposons que  $A$  soit  $m \times n$  (elle pourrait aussi être carrée  $n \times n$  et singulière) alors il existe des  $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$  tq  $A\vec{x} = \vec{b}$  est incompatible. Dans ce cas, notre but sera d'approximer  $\vec{b}$  en cherchant  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  tq

$$A\vec{x} \approx \vec{b}$$

### 6.1 Produit scalaire et orthogonalité

**Définition 6.1** (produit scalaire usuel dans  $\mathbb{R}^n$ ).

Soient  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ . On définit le *produit scalaire usuel*  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  (aussi noté  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ ) par

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n = \sum_{i=1}^n u_iv_i \in \mathbb{R}$$

*Remarque:* On peut écrire le produit scalaire d'une autre manière

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = (u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

On obtient l'égalité suivante :

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}^T \vec{v}}$$

**Théorème 6.2.** Soient  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$  et soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Alors

1.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
2.  $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$
3.  $(\alpha \vec{u}) \cdot \vec{w} = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{w})$
4.  $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$  et  $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$  si et seulement si  $\vec{u} = \vec{0}$

## Généralisation à des espaces vectoriels quelconques

**Définition 6.3** (produit scalaire).

Soient  $V$  un espace vectoriel et  $u, v, w \in V$ . On dira qu'une application  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  est un produit scalaire si

$$(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle$$

1.  $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$  (symétrique)
2.  $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$
3.  $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$
4.  $\langle u, u \rangle \geq 0$  et  $\langle u, u \rangle = 0 \iff u = 0_V$  (définie positive)

**Exemple 6.4.**

Soit  $\mathbb{P}_2$ . Montrons que  $\langle p, q \rangle = \sum_{i=0}^2 p(i)q(i)$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{P}_2$ .

Soient

$$\begin{aligned} p(t) &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \\ q(t) &= b_0 + b_1 t + b_2 t^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle p, q \rangle &= p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2) \\ &= a_0 b_0 + (a_0 + a_1 + a_2)(b_0 + b_1 + b_2) + (a_0 + 2a_1 + 4a_2)(b_0 + 2b_1 + 4b_2) \end{aligned}$$

Par exemple, si  $p(t) = 1 + t$  et  $q(t) = 2 - t^2$ , on a

$$\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$$

$$\langle p, q \rangle = (1)(2) + (2)(1) + (3)(-2) = 2 + 2 - 6 = -2.$$

On vérifie que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  un produit scalaire.

1.  $\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$

$$\langle p, q \rangle = q(0)p(0) + q(1)p(1) + q(2)p(2) = \langle q, p \rangle$$

2.  $\langle p + q, r \rangle = \langle p, r \rangle + \langle q, r \rangle$ ? Oui, on a :

$$(p + q)(0)r(0) = (p(0) + q(0))r(0) = p(0)r(0) + q(0)r(0)$$

3. Pour montrer que  $\langle \alpha p, q \rangle = \alpha \langle p, q \rangle$  on procède comme au point précédent.

4.  $\langle p, p \rangle = p(0)^2 + p(1)^2 + p(2)^2 \geq 0$

$$\langle p, p \rangle = 0 \iff p(0)^2 + p(1)^2 + p(2)^2 = 0$$

Ce qui implique  $p(0) = 0, p(1) = 0$  et  $p(2) = 0$ . On a que le polynôme  $p$  s'annule en 3 points en  $t = 0, t = 1$  et  $t = 2$ . Or  $p$  est de degré 2 :

$$p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2$$

et  $p$  a exactement 2 racines. Mais on cherche un polynôme de degré 2 avec 3 racines. Le seul polynôme de  $\mathbb{P}_2$  avec 3 racines est le polynôme nul. On a donc  $\langle p, p \rangle = 0$  si et seulement si  $p = 0$  (le polynôme nul).

## Norme d'un vecteur et distance dans $\mathbb{R}^n$

### Définition 6.5 (norme).

Soit  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ . Sa *norme* est le scalaire donné par La **norme euclidienne** (ou longueur) d'un vecteur  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  est donnée par

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2} \in \mathbb{R}_+$$

$\|\vec{v}\|$  peut être nul ou positif.

*Remarque:* La norme coïncide avec la notion de longueur.

*Remarque:*

1.  $\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$

2.  $\|\vec{v}\| = 0 \iff \vec{v} = \vec{0}$

3. Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} \|\alpha\vec{v}\| &= \sqrt{(\alpha v_1)^2 + (\alpha v_2)^2 + \dots + (\alpha v_n)^2} \\ &= \sqrt{\alpha^2 v_1^2 + \alpha^2 v_2^2 + \dots + \alpha^2 v_n^2} \\ &= \sqrt{\alpha^2 (v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2)} \\ &= |\alpha| \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2} \\ &= |\alpha| \|\vec{v}\| \in \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

### Exemple 6.6.

Soit  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

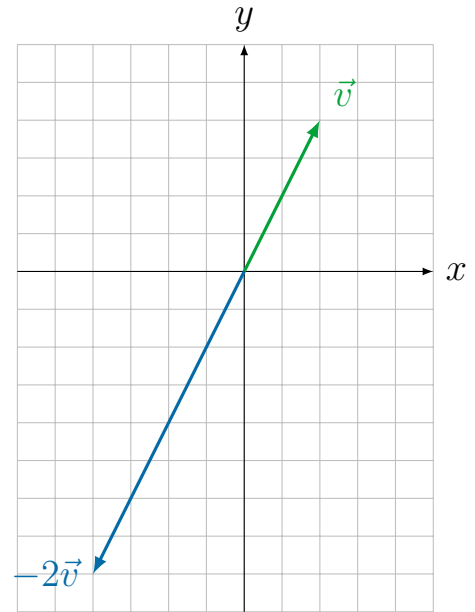
On a  $\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$

On a

$$\begin{aligned} \|(-2)\vec{v}\| &= \left\| \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} \\ &= \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

Donc

$$\|(-2)\vec{v}\| = |-2|\|\vec{v}\| = 2\sqrt{5}$$



### Définition 6.7 (unitaire).

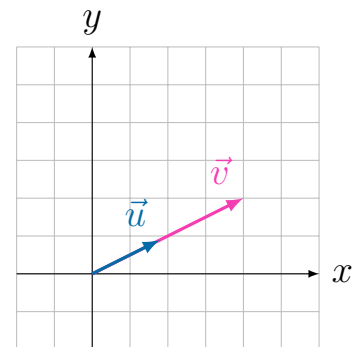
Un vecteur  $\vec{v}$  est dit *unitaire* si  $\vec{v}$  est de norme 1.

### Exemple 6.8.

Soit  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\vec{v} \neq 0$ , on a  $\|\vec{v}\| > 0$ .

Dans ce cas, le nouveau vecteur  $\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$  est unitaire. On a

$$\|\vec{u}\| = \left\| \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v} \right\| = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\|\vec{v}\| = 1$$



*Remarque:* On va essayer de créer des bases formées de vecteurs unitaires et orthogonaux

### Exemple 6.9.

Soit  $\vec{v} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$ . On a  $\|\vec{v}\| = \sqrt{14} \neq 1$ . Donc  $\vec{v}$  n'est pas unitaire. Mais  $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{14}}\vec{v}$  oui.

### Définition 6.10 (distance).

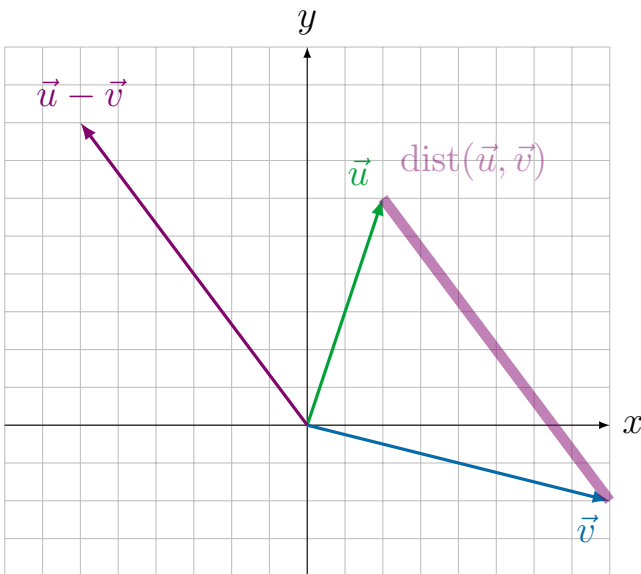
Soient  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ . La *distance* entre  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est la norme du vecteur  $\vec{u} - \vec{v}$ . On la note

$$\text{dist}(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\|$$

**Exemple 6.11.**

Soient  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ . On a  $\vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$  et

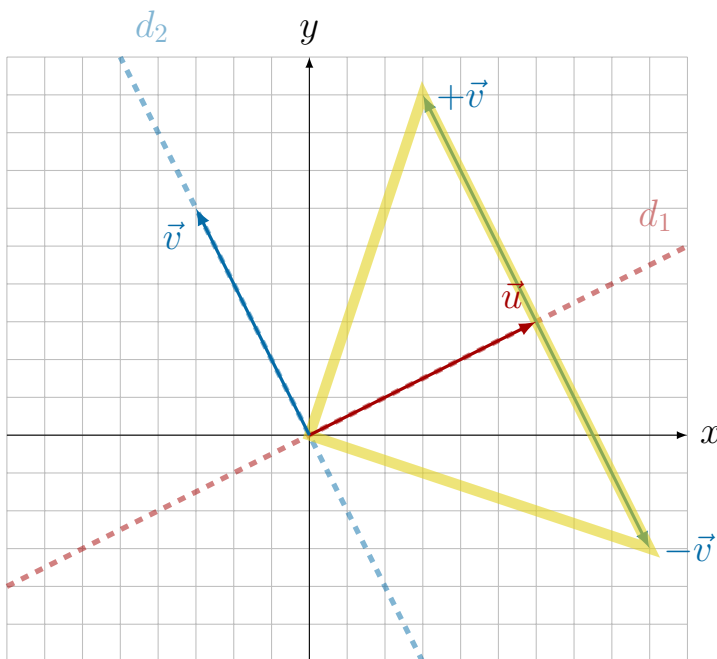
$$\text{dist}(\vec{u}, \vec{v}) = \left\| \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{25} = 5$$



**6.2 Orthogonalité dans  $\mathbb{R}^n$**

Soient  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$  et  $d_1 = \text{span}\{\vec{u}\}$ ,  $d_2 = \text{span}\{\vec{v}\}$  deux droites de  $\mathbb{R}^2$ .

On va chercher une condition sur  $\vec{u}, \vec{v}$  pour que  $d_1$  et  $d_2$  soient orthogonales.



On considère  $\vec{u} - \vec{v}$  et  $\vec{u} + \vec{v}$ . On fait apparaître un **triangle isocèle**. On a alors

$$\begin{aligned} d_1 \perp d_2 &\Leftrightarrow \|\vec{u} - \vec{v}\| = \|\vec{u} + \vec{v}\| \\ &\Leftrightarrow \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) \\ \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} d_1 \perp d_2 &\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} \\ &\Leftrightarrow -2\vec{u} \cdot \vec{v} = 2\vec{u} \cdot \vec{v} \\ &\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \end{aligned}$$

Donc  $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

**Définition 6.12** (vecteurs orthogonaux).

Soient  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ . Ils sont *orthogonaux* si et seulement si  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

*Remarque:* Le vecteur nul  $\vec{0}$  est orthogonal à tous les vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ .

**Théorème 6.13** (de Pythagore). Soient  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$  alors

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$$

**Orthogonal à un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$**

Soit  $W = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}^2$ . Cherchons l'ensemble de tous les vecteurs de  $\mathbb{R}^2$ , orthogonaux à  $W$ .

Soit  $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ . On veut  $\vec{u} \perp W$ . Donc  $\vec{u} \perp W \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  Ceci nous donne  $3u_1 + 2u_2 = 0$  qui est une équation linéaire à deux inconnues. On pose  $u_2$  comme variable libre, que l'on renomme avec  $t \in \mathbb{R}$  et on obtient

$$\vec{u} = t \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

Pour simplifier les calculs et la lecture, on peut simplifier les fractions. On obtient  $\vec{u} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$ . On obtient  $\text{span}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\} \perp W$ .

**Définition 6.14** (ensemble orthogonal).

Soient  $W$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  et  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ . Si  $\vec{v}$  est tel que  $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ , pour tous  $\vec{w} \in W$ , on aura que  $\vec{v}$  est orthogonal à  $W$ .

L'ensemble de tous les vecteurs orthogonaux à  $W$  s'appelle l'orthogonal à  $W$ , noté  $W^\perp$  et donnée par

$$W^\perp = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{v} \cdot \vec{w} = 0, \forall \vec{w} \in W\}$$

**Théorème 6.15.** Soit  $W$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ . Alors

1.  $W^\perp$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$

$$2. W \cap W^\perp = \{\vec{0}\}$$

*Démonstration.* voir le cours. □

*Remarque:* On a  $\dim W + \dim W^\perp = n$

## Rappel

Soit  $A$  une matrice  $m \times n$ , on peut la partitionner en blocs-lignes.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \hline \vdots & & & \vdots \\ \hline a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{lgn}_1(A) \\ \hline \text{lgn}_2(A) \\ \hline \vdots \\ \hline \text{lgn}_m(A) \end{pmatrix}$$

Avec

$$\text{lgn}_i(A)^\top = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, i = 1, \dots, m$$

**Théorème 6.16.** Soit  $A$  une matrice  $m \times n$  donnée par  $A = (\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n)$  où  $\vec{a}_i \in \mathbb{R}^m$ . Soient

$$\text{Ker}(A) = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{u} = \vec{0}\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$\text{Im}(A) = \text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$$

$$\text{Lgn}(A) = \text{span}\{\text{lgn}_1(A)^\top, \text{lgn}_2(A)^\top, \dots, \text{lgn}_m(A)^\top\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

Alors

$$1. \text{Lgn}(A) = \text{Im}(A^\top)$$

$$2. \text{Lgn}(A)^\perp = \text{Ker}(A)$$

$$3. \text{Im}(A)^\perp = \text{Ker}(A^\top)$$

*Démonstration.* voir le cours. □

## Exemple 6.17.

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  une matrice de taille  $2 \times 3$ , associée canoniquement à la

transformation linéaire  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , c'est-à-dire  $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ . On cherche  $\text{Ker}(A)$ ,  $\text{Ker}(A^T)$ ,  $\text{Lgn}(A)$ ,  $\text{Im}(A)$  et on veut vérifier le théorème 6.16. Comme  $A$  est associée à une transformation linéaire on représentera la situation graphiquement.

On a  $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

On a  $A\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t, r \in \mathbb{R}.$

On a

$$\text{Ker}(A) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

$$\text{Im}(A) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

$$\text{Lgn}(A) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

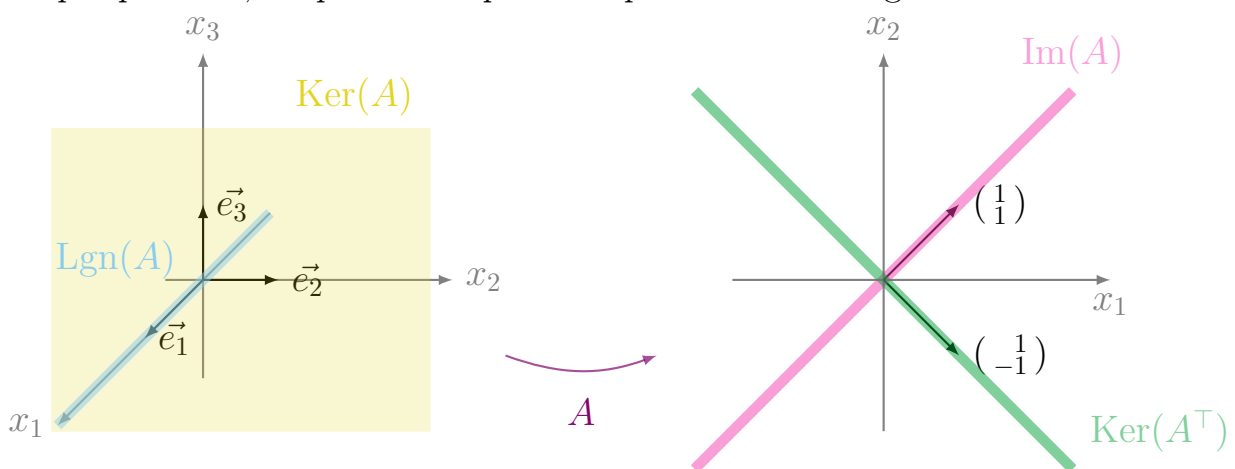
$$\text{Ker}(A^T) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

On a

$$\text{Lgn}(A)^\perp = \text{Ker}(A)$$

$$\text{Im}(A)^\perp = \text{Ker}(A^T)$$

Graphiquement, on peut voir que les espaces sont orthogonaux.



### 6.3 Familles orthogonales et projections orthogonales

On rappelle que notre but est d'approximer un vecteur  $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$  en cherchant  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  tq

$$A\vec{x} \approx \vec{b}$$

On s'intéresse à des problèmes incompatibles.  $A$  est une matrice  $m \times n$  singulière ( $A$  peut être carrée si  $m = n$  ou non-carrée si  $m \neq n$ ).

Pour approximer  $\vec{b}$  on va utiliser des projections orthogonales, et on aura besoin d'utiliser des familles de vecteurs orthogonaux.

Pour savoir si une famille est orthogonale, il faut vérifier que chaque couple de vecteurs est orthogonal.

Par exemple  $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

On a  $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$ ,  $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 = 0$  et  $\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 = 0$ , ainsi  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$  est une famille orthogonale. De plus chaque vecteurs est unitaire.

**Définition 6.18** (famille orthogonale).

Une famille de vecteurs  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p\}$  de  $\mathbb{R}^n$  est dite *orthogonale* si  $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0$ , pour tout  $i \neq j, i, j = 1, \dots, p$ .

**Exemple 6.19.**

1)  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . On a  $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$ ,  $\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = 0$  mais  $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = 1 \neq 0$ . Donc la famille  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  n'est pas orthogonale.

2)  $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  est une famille orthogonale. On peut aussi voir qu'elle est linéairement indépendante. C'est donc une base de  $\mathbb{R}^2$

*Remarque:* On a que  $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$  et  $\vec{v}_2 \perp \vec{v}_3$  n'implique pas que  $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_3$ . L'orthogonalité n'est pas transitive.

**Théorème 6.20.** Soit  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p\}$  une famille orthogonale de  $\mathbb{R}^n$ ,  $p \neq n$ . Alors si  $\vec{u}_i \neq 0$  pour tout  $i = 1, \dots, p$  la famille  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p\}$  est linéairement indépendante.

*Démonstration.* voir le cours. □

*Remarque:* si  $p = n$ , par le théorème de la base 4.41, la famille  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p\}$  (donc  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ ) sera une base de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $p < n$  alors ça ne sera pas une base de  $\mathbb{R}^n$ , car il nous manque des vecteurs.

**Définition 6.21** (base orthogonale).

Soit  $W$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ . On appelle *base orthogonale* de  $W$  toute base de  $W$  qui est composée d'une famille orthogonale.

**Exemple 6.22.**

- i) la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  est une base orthogonale de  $\mathbb{R}^n$
- ii)  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ , mais pas une base orthogonale.
- iii)  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  est une base orthogonale de  $\mathbb{R}^3$ .

### Un intérêt des bases orthogonales

Soient  $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$  et  $\vec{v}$  donnés par

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et } \vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 11 \end{pmatrix}$$

On cherche  $[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$  et on connaît  $[\vec{v}]_{\mathcal{E}}$  car  $[\vec{v}]_{\mathcal{E}}\vec{v}$ . On a aussi, par définition

de la matrice de changement de bases (ou coordonnées) de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{E}$  :  $P_{\mathcal{E}\mathcal{B}}[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = [\vec{v}]_{\mathcal{E}}$ , avec

$$P_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a alors plusieurs techniques, deux qui ont déjà été vues au chapitre 4, et une nouvelle méthode qui utilise les bases orthogonales.

1. inverser  $P_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$  et avoir une multiplication matrice-vecteur  $[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{E}\mathcal{B}}^{-1}[\vec{v}]_{\mathcal{E}}$ .
2. résoudre un système pour trouver l'inconnue  $[\vec{v}]_{\mathcal{B}}$ .

On obtient  $[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} = 2\vec{u}_1 + 11\vec{u}_2 + 4\vec{u}_3$ .

Calculons maintenant des produits scalaires

$$\begin{array}{rcc}
\vec{v} \cdot \vec{u}_1 = 4 & \vec{v} \cdot \vec{u}_2 = 11 & \vec{v} \cdot \vec{u}_3 = 8 \\
\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 = 2 & \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2 = 1 & \vec{u}_3 \cdot \vec{u}_3 = 2 \\
: \frac{\quad}{\quad} & : \frac{\quad}{\quad} & : \frac{\quad}{\quad} \\
\frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} = 2 & \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2} = 11 & \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_3}{\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_3} = 4
\end{array}$$

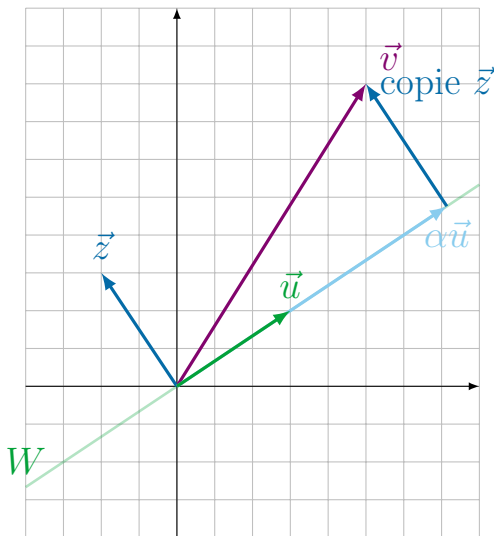
On voit que la dernière ligne (avec la fraction de produits scalaires) nous donne les coefficients  $\alpha_i$ .

**Théorème 6.23.** Soient  $W$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  et  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p\}$  une base orthogonale de  $W$ . Alors, pour tout  $\vec{w} \in W$  on a

$$\vec{w} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_p \vec{u}_p, \quad \alpha_i = \frac{\vec{w} \cdot \vec{u}_i}{\vec{u}_i \cdot \vec{u}_i}, i = 1, \dots, p$$

*Démonstration.* voir le cours. □

## Projections orthogonales



Soient  $\vec{u} \in \mathbb{R}^2, \vec{u} \neq \vec{0}$

$$W = \text{span}\{\vec{u}\} \subset \mathbb{R}^2$$

Soit  $\vec{v} \in \mathbb{R}^2, \vec{v} \notin W$ . On cherche à décomposer  $\vec{v}$  en la somme de deux vecteurs :

$$\vec{v} = \alpha \vec{u} + \vec{z} \quad \text{avec } \vec{z} \perp W \quad (\vec{z} \perp \vec{u})$$

où  $\alpha$  est un scalaire et  $\vec{z}$  est un vecteur.

On a deux inconnues,  $\alpha$  et  $\vec{z}$ .

$$\vec{v} = \alpha \vec{u} + \vec{z} \iff \vec{z} = \vec{v} - \alpha \vec{u}$$

On sait que  $\vec{z} \perp \vec{u}$  donc  $\vec{z} \cdot \vec{u} = 0$ .

On a :

$$\begin{aligned}
\vec{z} \cdot \vec{u} = 0 &\iff (\vec{v} - \alpha \vec{u}) \cdot \vec{u} = 0 \\
&\iff \vec{v} \cdot \vec{u} - \alpha(\vec{u} \cdot \vec{u}) = 0
\end{aligned}$$

Donc  $\alpha = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \in \mathbb{R}$ .

Ainsi

$$\alpha \vec{u} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \vec{u} \in W$$

On appelle

$$\frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \vec{u}$$

la projection orthogonale de  $\vec{v}$  sur  $W$ .

On la note

$$\text{proj}_W(\vec{v}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \vec{u}$$

Le vecteur  $\vec{z} = \vec{v} - \alpha \vec{u} = \vec{v} - \text{proj}_W(\vec{v})$  est appelé la composante de  $\vec{v}$  orthogonale à  $W$ .

On a :

$$\vec{z} \in W^\perp$$

où  $W^\perp$  (prononcé " $W$  orthogonal") est le sous-espace orthogonal à  $W$ .

**Exemple 6.24.**

Soit  $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $W = \text{span}\{\vec{u}\}$ . On a

$$\text{proj}_W(\vec{v}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \vec{u} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \vec{z} = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

**Définition 6.25** (famille orthonormale).

On dira qu'une famille  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p\}$  de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  est *orthonormale* si

- 1) elle est orthogonale
- 2) si tous les vecteurs sont unitaires,  $\|\vec{u}_i\| = 1$  pour tout  $i = 1, \dots, p$ .

On dira alors que c'est une base orthogonale de l'espace qu'elle engendre, c'est-à-dire une base orthogonale de  $W = \text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ .

**Exemple 6.26.**

- 1)  $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$  est une base orthonormale de  $\mathbb{R}^n$ .
- 2) Soient les vecteurs

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Calculons les produits scalaires :

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = 0$$

$$\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = 0$$

Donc  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  est une famille orthogonale (et c'est une base de  $\mathbb{R}^3$ ).

Calculons les normes :

$$\|\vec{v}_1\| = \sqrt{17}$$

$$\|\vec{v}_2\| = \sqrt{13}$$

$$\|\vec{v}_3\| = \sqrt{221}$$

Comme  $\|\vec{v}_i\| \neq 1$  pour tout  $i$ , la famille  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  n'est pas orthonormale.

On peut cependant normaliser les vecteurs, et prendre

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\|\vec{v}_1\|} \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{17}} \vec{v}_1$$

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{\|\vec{v}_2\|} \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{13}} \vec{v}_2$$

$$\vec{u}_3 = \frac{1}{\|\vec{v}_3\|} \vec{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{221}} \vec{v}_3$$

La famille  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$  est une famille orthonormale. C'est une base orthonormale de  $\mathbb{R}^3$ .

**Théorème 6.27.** Soit  $U = (\vec{u}_1 \cdots \vec{u}_n)$  une matrice  $m \times n$ . Alors les colonnes  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$  sont orthonormales si et seulement si

$$U^T U = I_n$$

*Remarque:* On a  $U^T U \neq U U^T$  et  $U U^T \neq I_m$ .

*Remarque:* Une telle matrice préserve les normes et les angles entre les vecteurs.

**Exemple 6.28.**

Soit  $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . On a

$$U^T U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Mais

$$UU^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc  $U^T U \neq UU^T$  et  $UU^T \neq I_3$ .

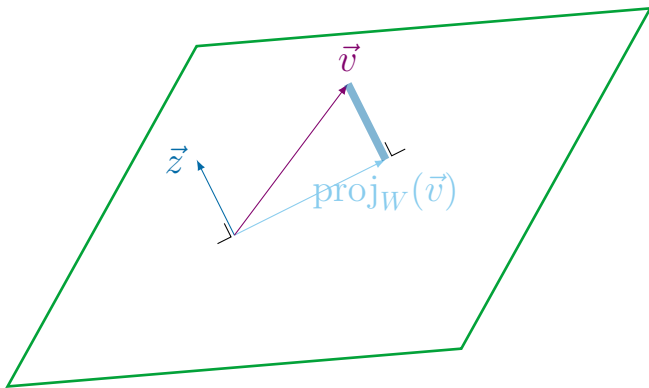
**Théorème 6.29.** Soit  $U$  une matrice  $m \times n$  dont les colonnes sont orthonormales. Soient  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ . Alors

1.  $\|U\vec{v}\| = \|\vec{v}\|$
2.  $U\vec{u} \cdot U\vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}$
3.  $U\vec{u} \cdot U\vec{v} = 0$  si et seulement si  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

### Généralisation de la projection à $\mathbb{R}^n$

Soient  $W \subset \mathbb{R}^n$  un sous espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  et  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\vec{v} \notin W$ . Alors  $\text{proj}_W(\vec{v})$  est

1. l'unique vecteur de  $W$  tel que  $\vec{z} = \vec{v} - \text{proj}_W(\vec{v})$
2. l'unique vecteur de  $W$  qui minimise la distance entre  $\vec{v}$  et  $W$ .



**Théorème 6.30.** Soit  $W$  un sous-EV de  $\mathbb{R}^n$ . Alors tout vecteur  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  peut s'écrire de façon unique comme la somme de deux vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  :

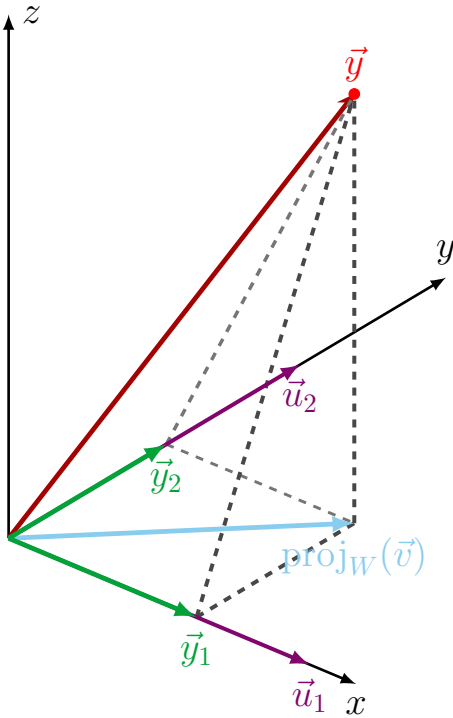
$$\vec{v} = \vec{w} + \vec{z} \text{ avec } \vec{w} \in W, \vec{z} \in W^\perp$$

De plus  $\vec{w} = \text{proj}_W(\vec{v})$  et  $\vec{z} = \vec{v} - \text{proj}_W(\vec{v})$ .

Plus précisément, si  $W = \text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$  avec  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$  une base orthogonale de  $W$ , on a

$$\text{proj}_W(\vec{v}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 + \dots + \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_p}{\vec{u}_p \cdot \vec{u}_p} \vec{u}_p$$

## Interprétation géométrique



Si  $W = \text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ ,  $W$  est le plan  $O_{xy}$ .

On aura

$$\text{proj}_W(\vec{y}) = \vec{y}_1 + \vec{y}_2$$

On a

$$\vec{y}_1 = \text{proj}_{\vec{u}_1}(\vec{y}) = \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1$$

On obtient

$$\text{proj}_W(\vec{y}) = \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 + \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2} \vec{u}_2$$

*Remarque:* La projection  $\text{proj}_W(\vec{v})$  ne dépend pas du choix de la base orthogonale de  $W$ . Si on change la base orthogonale de  $W$  on aura que les coefficients  $\frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_i}{\vec{u}_i \cdot \vec{u}_i}$  changent (comme c'est le cas quand on change de bases), mais la projection reste la même (c'est toujours le même vecteur obtenu). Si  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p\}$  et  $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_p\}$  sont deux bases orthogonales de  $W$  on a

$$\text{proj}_W(\vec{v}) = \sum_{i=1}^p \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_i}{\vec{u}_i \cdot \vec{u}_i} \vec{u}_i = \sum_{i=1}^p \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}_i}{\vec{w}_i \cdot \vec{w}_i} \vec{w}_i$$

### Exemple 6.31.

Soient  $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . On a que  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$  sont orthogonaux.

Soit  $W = \text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$  et  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$  est une base orthogonale de  $W$ . On cherche la projection  $\text{proj}_W(\vec{v})$  ainsi que  $\vec{z}$ .

$$\text{proj}_W(\vec{v}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2} \vec{u}_2 = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 16 \\ 10 \\ 17 \end{pmatrix}$$

et

$$\vec{z} = \vec{v} - \text{proj}_W(\vec{v}) = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Prenons une autre base orthogonale de  $W$ , par exemple

$$W = \text{span}\left\{\vec{u}_1, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$$

On aura

$$\text{proj}_W(\vec{v}) = \frac{4}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}}{20} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \dots = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 16 \\ 10 \\ 17 \end{pmatrix}$$

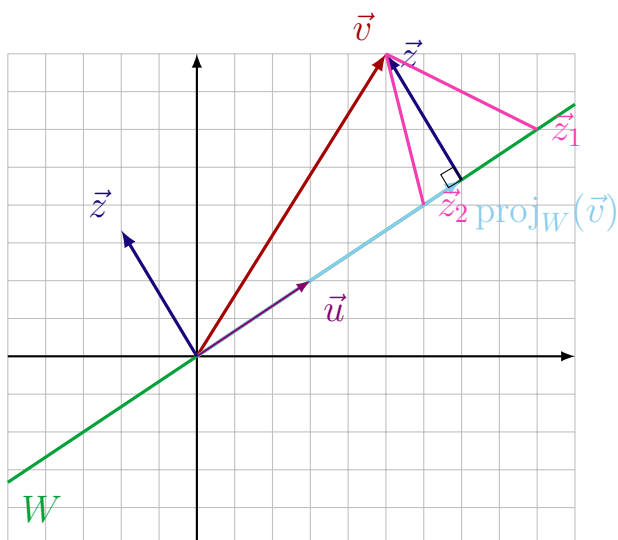
La projection ne change pas (ici la projection est donnée dans la base canonique). Par contre il faut toujours prendre une base orthogonale de  $W$ .

## Interprétation géométrique de la distance minimale

Soit  $\vec{z} \in \mathbb{R}^2$  et soient  $\vec{z}_1$  et  $\vec{z}_2$  deux vecteurs différents de  $\vec{z}$  (dans la figure on choisit de représenter leur normes en rose, plutôt que de représenter les vecteurs qui partent de l'origine. Notre but est de comparer des distances.)

Graphiquement :

$$\|\vec{z}\| \leq \|\vec{z}_1\| \quad \text{et} \quad \|\vec{z}\| \leq \|\vec{z}_2\|$$



Il existe  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$  tels que

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{u} + \vec{z}_1$$

et

$$\vec{v} = \alpha_2 \vec{u} + \vec{z}_2$$

De plus  $\vec{v}$  s'écrit comme décomposition unique en  $\vec{v} = \text{proj}_W(\vec{v}) + \vec{z}$ , avec  $\vec{z} \perp \vec{u}$ .

On a

$$\|\vec{v} - \text{proj}_W(\vec{v})\| \leq \|\vec{v} - \alpha_1 \vec{u}\|$$

et

$$\|\vec{v} - \text{proj}_W(\vec{v})\| \leq \|\vec{v} - \alpha_2 \vec{u}\|$$

Or  $\alpha_1, \alpha_2$  sont arbitraires, donc

$$\|\vec{v} - \text{proj}_W(\vec{v})\| \leq \|\vec{v} - \alpha \vec{u}\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

avec une égalité si  $\alpha \vec{u} = \text{proj}_W(\vec{v})$ .

Donc  $\text{proj}_W(\vec{v})$  est le vecteur de  $W$  le plus proche de  $\vec{v}$  et il est unique.

**Théorème 6.32** (de la meilleure approximation). Soient  $W$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  et  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ . Soit  $\text{proj}_W(\vec{v})$  la projection orthogonale de  $\vec{v}$  sur  $W$ . On dira que  $\text{proj}_W(\vec{v})$  est la meilleure approximation de  $\vec{v}$  dans  $W$  :

$$\|\vec{v} - \text{proj}_W(\vec{v})\| \leq \|\vec{v} - \vec{w}\|, \forall \vec{w} \in W$$

*Remarque:* Si  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p\}$  est une base orthonogale de  $W$ , on a

$$\text{proj}_W(\vec{v}) = (\vec{v} \cdot \vec{u}_1)\vec{u}_1 + \dots + (\vec{v} \cdot \vec{u}_p)\vec{u}_p$$

Si  $U = (\vec{u}_1 \ \vec{u}_2 \ \dots \ \vec{u}_p)$ , on a

$$\text{proj}_W(\vec{v}) = U \begin{pmatrix} \vec{v} \cdot \vec{u}_1 \\ \vdots \\ \vec{v} \cdot \vec{u}_p \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \vec{u}_1^T \vec{v} \\ \vdots \\ \vec{u}_p^T \vec{v} \end{pmatrix} = UU^T \vec{v}$$

**Théorème 6.33.** Soit  $W$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  et supposons que  $W = \text{span}\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p\}$  où  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p\}$  est une famille orthonormale. Alors pour tous  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$

$$\text{proj}_W(\vec{v}) = UU^T \vec{v}$$

avec  $U = (\vec{u}_1 \ \dots \ \vec{u}_p)$ , une matrice  $n \times p$ .

*Remarque:*

1) On a

- $U^T U = I_p$
- $U^T U \vec{w} = I_p \vec{w} = \vec{w} \quad \forall \vec{w} \in \mathbb{R}^p$
- $UU^T \vec{v} = \text{proj}_W(\vec{v}) \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$
- $W = \text{Im}(U)$

2) Si  $W = \mathbb{R}^n$  (ce qui implique  $p = n$ , donc  $U$  est une matrice carrée), alors :

$$UU^T = I_n = U^T U$$

**Définition 6.34** (matrice orthogonale).

Une matrice  $n \times n$  inversible telle que  $U^T U = I_n$  est dite *orthogonale*.

*Remarque:* Il y existe une autre définition (similaire) : une matrice  $n \times n$  inversible telle que  $U^{-1} = U^T$  est dite orthogonale.

Les lignes et les colonnes de  $U$  sont orthonormales.

## 6.4 Gram-Schmidt

Dans la section précédentes, les bases étaient orthogonales.

Notre but va être de trouver la projection orthogonale  $\text{proj}_W(\vec{y})$  quand on n'a pas une base orthogonale de  $W$ .

Soit  $W = \text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ , avec  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$  une base non-orthogonale.

La figure 6.4 illustre ce qui se passe si la base n'est pas orthogonale.

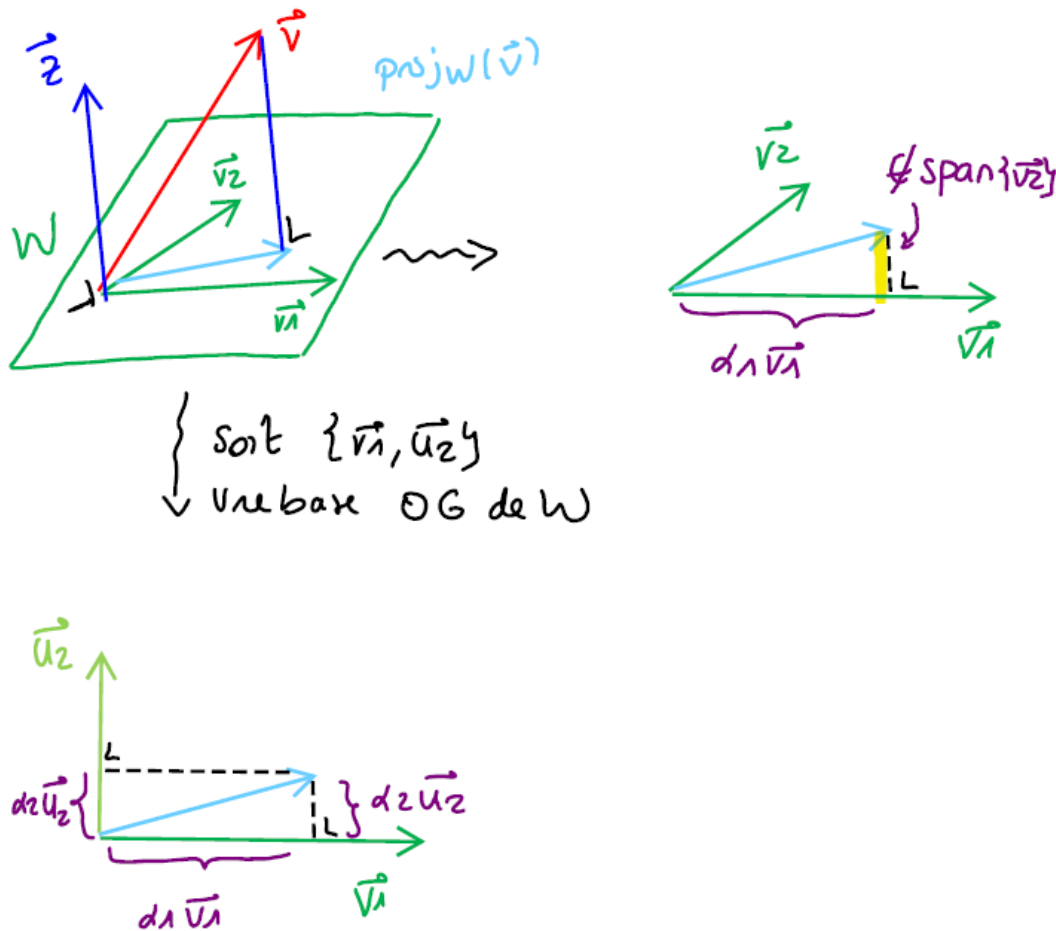


FIGURE 5 – description du procédé de Gram-Schmidt

Par le théorème 6.30 on a

$$\text{proj}_W(\vec{v}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} \vec{v}_1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2} \vec{u}_2$$

On a

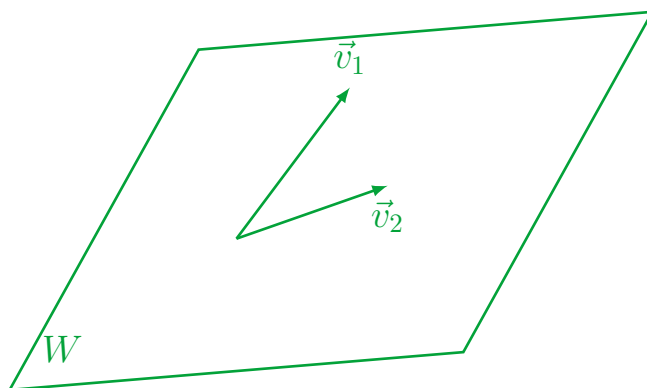
- $\text{proj}_W(\vec{v})$  est une combinaison linéaire de  $\vec{v}_1$  et  $\vec{u}_2$

- les coefficients  $\alpha_1, \alpha_2$  sont uniques et connus
- $\text{proj}_W(\vec{v})$  est la somme de la projection de  $\vec{v}$  sur  $\vec{v}_1$  et de  $\vec{v}$  sur  $\vec{v}_2$

Ceci ne fonctionne plus si on considère  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$  car la partie en jaune dans la figure 6.4 n'est pas dans le  $\text{span}\{\vec{v}_2\}$ .

### Orthogonalisation d'une base de $W$

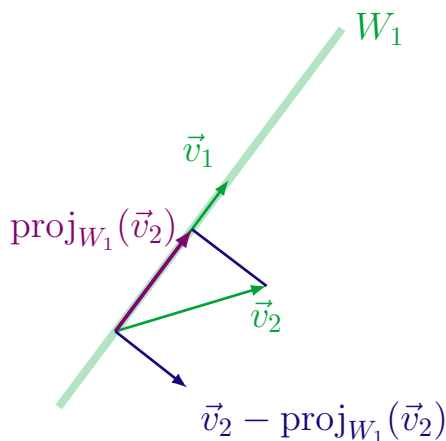
On cherche  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$  une base orthogonale de  $W$ , en partant de la base  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ .



**Étape 1 :** On pose  $\vec{u}_1 = \vec{v}_1$ , et on cherche  $\vec{u}_2 \in W$ ,  $\vec{u}_2 \neq \vec{0}$ , tel que  $\vec{u}_2 \perp \vec{u}_1$ .

On pose  $W_1 = \text{span}\{\vec{u}_1\}$ .

On sait que  $\vec{v}_2 - \text{proj}_{W_1}(\vec{v}_2) \perp \vec{u}_1$  et  $\vec{v}_2 - \text{proj}_{W_1}(\vec{v}_2) \in W$ .



**Étape 2 :** On pose  $\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \text{proj}_{W_1}(\vec{v}_2)$ .

Alors  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$  est une base orthogonale de  $W_2 = \text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ .

### Exemple 6.35.

Soient  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ . On a

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 = \frac{1}{23} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 15 \end{pmatrix}$$

**Théorème 6.36** (Algorithme de Gram-Schmidt). Soit  $W$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  et  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$  une base de  $W$ . Alors on peut construire une base orthogonale de  $W$  en suivant le procédé de Gram-Schmidt :

1.  $\vec{u}_1 = \vec{v}_1$  et  $W_1 = \text{span}\{\vec{u}_1\}$
2.  $\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \text{proj}_{W_1}(\vec{v}_2)$  et  $W_2 = \text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$
3.  $\vec{u}_3 = \vec{v}_3 - \text{proj}_{W_2}(\vec{v}_3)$  et  $W_3 = \text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$
4. ...
5.  $\vec{u}_p = \vec{v}_p - \text{proj}_{W_{p-1}}(\vec{v}_p)$

La famille  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p\}$  est une base OG de  $W$ .

*Remarque:* Si on change l'ordre ou le produit scalaire, on change la base obtenue.

**Exemple 6.37.**

Soient  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Soit  $W = \text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ .

- Étape 0 : Base de  $W$  : est-ce que  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$  est une base de  $W$  ? On a  $\vec{v}_2 - \vec{v}_3 = \vec{v}_4$  (ou une relation similaire), donc le vecteur  $\vec{v}_4$  est superflu. Ainsi  $W = \text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  (ou  $\text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4\}$ ). On peut alors faire l'algorithme avec notre base de  $W$ .

- Étape 1 : Vérification de l'orthogonalité : est-ce que  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  est une base orthogonale ? Non, on a

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 3$$

$$\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = 2$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = 2$$

- Étape 2 : Processus de Gram-Schmidt (G-S) :

- $\vec{u}_1 = \vec{v}_1$ , et  $W_1 = \text{span}\{\vec{u}_1\}$

$$\bullet \vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \text{proj}_{W_1}(\vec{v}_2) = \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 = \dots = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Comme la fraction compliquera les calculs, on multiplie  $\vec{u}_2$  pour simplifier, et on prend  $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . On pose  $W_2 = \text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$

$$\bullet \vec{u}_3 = \vec{v}_3 - \text{proj}_{W_2}(\vec{v}_3) = \dots = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ On simplifie aussi en multipliant}$$

$$\text{par 3 et on prend } \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On prend alors  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$  comme base de  $W$ .

### Marche à suivre pour Gram-Schmidt

On a  $W = \text{span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$ .

- 1) on vérifie que  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$  est une base de  $W$ , sinon on enlève les vecteurs superflus et on choisit une base de  $W$ .
- 2) on regarde si  $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = 0$  pour  $i \neq j$
- 3) on fait l'algorithme de Gram-Schmidt.

### 6.5 Factorisation QR

On aimerait factoriser une matrice  $A$  en un produit de deux matrices, sous la forme  $A = QR$ .

Soit  $A$  une matrice  $m \times n$ . On aimerait obtenir  $A = QR$ , avec  $Q$  une matrice dont les colonnes sont orthonormées et  $R$  une matrice triangulaire supérieure.

**Théorème 6.38.** *Soit  $A$  une matrice  $m \times n$  dont les colonnes sont linéairement indépendantes. Alors il existe une factorisation  $A = QR$  avec :*

1.  $Q$  une matrice  $m \times n$ , avec des colonnes orthonormées qui forment une base de  $\text{Im}(A)$  :  $\text{span}\{\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_n\} = \text{span}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\} = \text{Im}(A)$ .

2.  $R$  une matrice  $n \times n$ , triangulaire supérieure, inversible avec ses coefficients diagonaux strictement positifs.

*Remarque:*

1.  $Q^T Q = I_n$ ,  $Q Q^T = \text{proj}_{\text{Im}(A)}$ .
2. Si  $A$  est  $n \times n$ ,  $Q$  est  $n \times n$  et  $Q$  est orthogonale,  $Q^{-1} = Q^T$ .
3.  $m \geq n$  car les colonnes de  $A$  sont linéairement indépendantes.

*Remarque:*[hors-cours].

Il existe plusieurs manière de "voir" la factorisation, ou décomposition,  $QR$  et d'obtenir une décomposition de  $A$  en un produit d'une matrice  $Q$  et d'une matrice  $R$ . Dans ces différentes décompositions, les matrices  $Q$  et  $R$  n'auront pas la même taille que celles données dans le théorème 6.38

Dans notre théorème 6.38, la matrice  $A$  est  $m \times n$  avec des colonnes linéairement indépendantes, et la décomposition  $QR$  obtenue est en fait une *décomposition QR tronquée*. Par opposition à la *décomposition QR complète* où la matrice  $Q$  est une matrice orthogonale ( $m \times m$ ), dans cette version il faut compléter la base orthonormales obtenue pour  $\text{Im}(A)$  avec des vecteurs afin d'obtenir une base orthonormée de  $\mathbb{R}^m$ .

Dans la version complète  $Q$  est orthogonale et donc  $Q^{-1} = Q^T$  ce qui n'est pas le cas dans notre théorème 6.38, car  $Q$  n'est pas carrée.

*Remarque:* La manière la plus efficace pour obtenir  $Q$  et  $R$  et de faire Gram-Schmidt sur les colonnes de  $A$  et de normaliser, en parallèle on peut construire la matrice  $R$ .

Sinon on peut constuire  $Q$  et puis calculer  $R$  en utilisant  $A = QR$  et  $Q^T Q = I_n$ . Ceci nous donne  $R = Q^T A$ . C'est peut-être moins rapide (et pas nécessaire) car il faut calculer un produit de deux matrices.

**Exemple 6.39.**

Soit la matrice  $A$  donnée par  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On a un pivot par colonne, donc les colonnes de  $A$ ,  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  sont linéairement indépendantes. On cherche une matrice  $Q$ ,  $4 \times 3$  et  $R$  est  $3 \times 3$  telles que  $A = QR$ .

**Etape 1** on orthogonalise  $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$  avec G-S et on normalise. On va obtenir les colonnes de  $Q$ . Ici on va choisir de simplifier les fractions pour nos vecteurs  $\vec{u}_i$ , et

ensuite de normaliser pour trouver les colonnes de  $Q$  (à comparer avec la méthode vue en classe à la fin du chapitre 6.4. On obtiendra la même décomposition mais les calculs sont faits dans un ordre différent et la construction  $R$  est un peu différente)

$$- \vec{u}_1 = \vec{a}_1, \|\vec{u}_1\| = \sqrt{3}. \text{ On prend } \vec{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$- \vec{u}_2 = \vec{a}_2 - \text{proj}_{\vec{u}_1}(\vec{a}_2) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}. \text{ Pour continuer l'algorithme on prend}$$

$$\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \|\vec{u}_2\| = \sqrt{15}. \text{ On prend } \vec{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}. \text{ On pose } W_2 = \text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}.$$

$$- \vec{u}_3 = \vec{a}_3 - \text{proj}_{W_2}(\vec{a}_3) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ On obtient finalement } \vec{q}_3 = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a  $Q = (\vec{q}_1 \quad \vec{q}_2 \quad \vec{q}_3)$ .

**Etape 2** Pour trouver la matrice  $R$  on a deux manières :

1. avec  $R = Q^T A$
2. en utilisant le lien entre  $\vec{a}_i$  et  $\vec{q}_i$  (ici il faut juste faire attention car dans cet exemple nous avons pris des vecteurs  $\vec{u}_i$  non-normalisés, donc la construction de matrice  $R$  est un peu différente de celle vue à la fin du chapitre 6.4. Le résultat est le même)

$$R = \begin{pmatrix} \vec{q}_1 \cdot \vec{a}_1 & \vec{q}_1 \cdot \vec{a}_2 & \vec{q}_1 \cdot \vec{a}_3 \\ 0 & \vec{q}_2 \cdot \vec{a}_2 & \vec{q}_2 \cdot \vec{a}_3 \\ 0 & 0 & \vec{q}_3 \cdot \vec{a}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 3\sqrt{15} & \sqrt{5} & 2\sqrt{15} \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

*Remarque:* si on n'avait pas choisit de simplifier les calculs pour le vecteur  $\vec{u}_2$  nous aurions trouvé d'autres produits scalaire dans  $R$ .

## 6.6 Méthode des moindres carrés

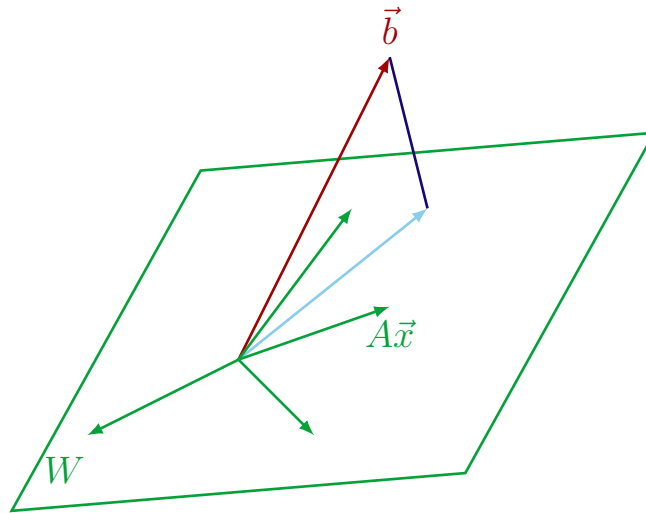
Notre but est de considérer  $A\vec{x} = \vec{b}$  incompatible,  $A$  est  $m \times n$ .

Pour certain  $\vec{b}$  (ou pour tous), il n'existe pas de  $\vec{x}$  tel que  $A\vec{x} = \vec{b}$ . Ceci implique que  $\vec{b} \notin \text{Im}(A)$ .

On a  $\text{Im}(A) = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^m \mid \exists \vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = \vec{v}\}$ .

On a :  $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, A\vec{x} \in \text{Im}(A)$

On cherche  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  tq  $A\vec{x}$  est le plus proche de  $\vec{b}$  (voir le chapitre sur les projections orthogonales).



Donc on cherche  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  tq

$$A\vec{x} = \text{proj}_{\text{Im}(A)} \vec{b}$$

C'est une équ. qui est compatible car  $\text{proj}_{\text{Im}(A)} \vec{b} \in \text{Im}(A)$

On va chercher  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  tel que  $A\vec{x}$  soit le plus proche de  $\vec{b}$ .

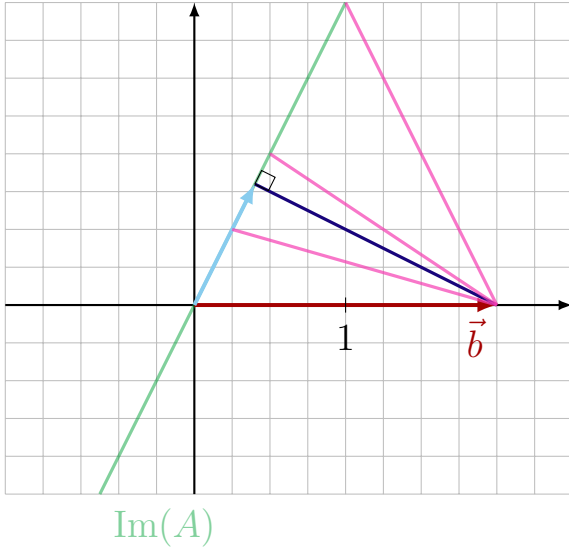
On sait que  $\text{proj}_{\text{Im}(A)}(\vec{b})$  est dans  $\text{Im}(A)$  et on devra résoudre :

$$A\vec{x} = \text{proj}_{\text{Im}(A)}(\vec{b})$$

C'est une équation qui est compatible car  $\text{proj}_{\text{Im}(A)}(\vec{b}) \in \text{Im}(A)$ .

**Exemple 6.40.**

Soient  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$  et  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ . On a  $\text{Im}(A) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$  et  $\vec{b} \notin \text{Im}(A)$ .



L'équation  $A\vec{x} = \vec{b}$  est incompatible.

On sait par contre que  $\text{proj}_{\text{Im}(A)}\vec{b}$  est dans  $\text{Im}(A)$ , donc que l'équation  $A\vec{x} = \text{proj}_{\text{Im}(A)}\vec{b}$  est compatible.

Par le théorème de la meilleure approximation on a, pour tous  $\vec{v} \in \text{Im}(A)$

$$\underbrace{\|\vec{b} - \text{proj}_{\text{Im}(A)}\vec{b}\|}_{\text{longueur du vecteur blanc foncé}} \leq \underbrace{\|\vec{b} - \vec{v}\|}_{\text{longueur des vecteurs roses}}$$

**Définition 6.41** (solution au sens des moindres carrés).

Soient  $A$  une matrice  $m \times n$  et  $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ . On appelle *solution au sens des moindres carrés* de  $A\vec{x} = \vec{b}$  le vecteur  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  tel que

$$\|\vec{b} - A\hat{x}\| \leq \|\vec{b} - A\vec{x}\| \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n.$$

**Stratégie**

- 1) calculer  $\text{proj}_{\text{Im}(A)}\vec{b}$ , pour cela il faudra une base orthogonale de  $\text{Im}(A)$ .
- 2) résoudre  $A\vec{x} = \text{proj}_{\text{Im}(A)}\vec{b}$  et la solution de cette équation sera  $\hat{x}$ . On pourra avoir une solution unique ou une infinité de solutions.

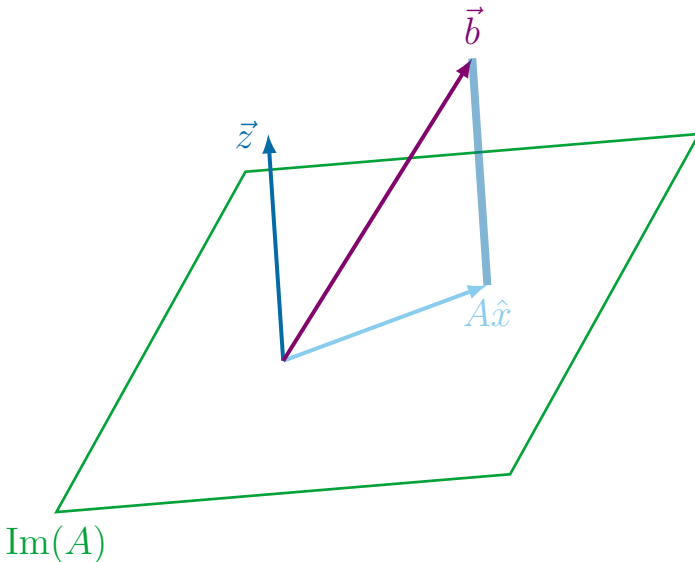
**Suite de l'Exemple 6.40**

- 1) On a que  $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$  est une base orthogonale de  $\text{Im}(A)$ . On calcule la projection et on obtient  $\text{proj}_{\text{Im}(A)}\vec{b} = \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .
- 2) résoudre  $A\vec{x} = \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ . On obtient  $x_1 = \frac{2}{5} - x_2$  et  $x_2$  est libre. On a  $\hat{x} = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . On a une infinité de solution

## L'équation normale

Dans cette section, on donne une méthode alternative pour calculer rapidement la projection sur  $\text{Im}(A)$  et cela sans calculer une base orthogonale de  $\text{Im}(A)$ .

Soient  $A = (\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \dots \ \vec{a}_n)$  une matrice  $m \times n$ . On a que  $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$  est une famille de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ , mais pas forcément linéairement indépendante, ni orthogonale.



La solution  $\hat{x}$  (ou les solutions) satisfait  $A\hat{x} = \text{proj}_{\text{Im}(A)}(\vec{b})$ . On pose  $\vec{z} = \vec{b} - A\hat{x}$ , et on a  $\vec{z} \perp \text{Im}(A)$ .

On a  $\text{Im}(A) = \text{span}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ , donc  $\vec{z} \cdot \vec{a}_i = 0$  pour tout  $i = 1, \dots, n$  (donc  $\vec{z} \perp \vec{a}_i$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ ).

Or  $\vec{a}_i$  sont les colonnes de  $A$ , donc  $\vec{z} \in \text{Im}(A)^\perp$ . On a vu que  $\text{Im}(A)^\perp = \text{Ker}(A^T)$ , ainsi  $\vec{z} \in \text{Ker}(A^T)$ . On obtient  $A^T \vec{z} = \vec{0}$ .

On a

$$A^T(\vec{b} - A\vec{x}) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad A^T A\vec{x} = A^T \vec{b}$$

On trouve une autre équation à résoudre pour trouver  $\hat{x}$  :

- soit  $A\vec{x} = \text{proj}_{\text{Im}(A)} \vec{b}$
- soit  $A^T A\vec{x} = A^T \vec{b}$  (ici pas besoin de faire Gram-Schmidt)

La solution obtenue est  $\hat{x}$  (unique ou non).

**Théorème 6.42.** *L'ensemble des solutions au sens des moindres carrés de  $A\vec{x} = \vec{b}$  est égal à l'ensemble des solutions de  $A^T A\vec{x} = A^T \vec{b}$ .*

*On appelle cette équation, l'équation normale.*

**Exemple 6.43.**

Soient  $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ . On a  $\text{Im}(A) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ . On a un système incompatible  $A\vec{x} = \vec{b}$ .

On trouve  $A^T A = \begin{pmatrix} 17 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$  et  $A^T \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ . On résout  $A^T A \vec{x} = A^T \vec{b}$ . On obtient  $\hat{x} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$  qui est la solution au sens des moindres carrés, et ici elle est unique.

*Remarque:* Dans l'exemple 6.43 la solution est unique car la matrice  $A^T A$  est inversible. Mais il se peut que la matrice  $A^T A$  ne soit pas inversible, et dans ce cas on obtiendra une infinité de solutions.

**Exemple 6.44.**

Soient  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$  et  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

On a  $A^T A = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$ . C'est une matrice singulière et l'ensemble de solutions au sens des moindres carrés est  $\hat{x} = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$ .

**Théorème 6.45.** *Soit  $A$  une matrice  $m \times n$ . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *Pour tout  $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$  :  $A\vec{x} = \vec{b}$  admet une unique solution au sens des moindres carrés.*
2.  *$A^T A$  est inversible.*
3. *Les colonnes de  $A$  sont linéairement indépendantes.*

*Dans ce cas, la solution au sens des moindres carrés est  $\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T \vec{b}$ .*

**De retour à QR**

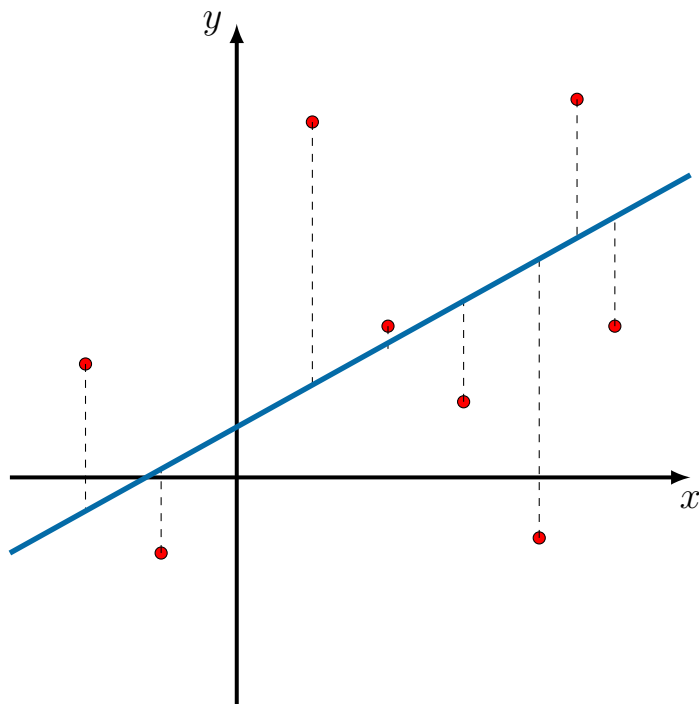
**Théorème 6.46.** *Soit  $A$  une matrice  $m \times n$  dont les colonnes sont linéairement indépendantes. Soient  $Q$  et  $R$  comme dans la décomposition QR ( $A = QR$ ). Alors pour tout  $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ ,  $A\vec{x} = \vec{b}$  admet une unique solution au sens des moindres carrés, données par*

$$\hat{x} = R^{-1} Q^T \vec{b}$$

## 6.7 Droite de régression ou droite des moindres carrés

Supposons qu'on ait des données expérimentales du type  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  (on appelle cela un nuage de points).

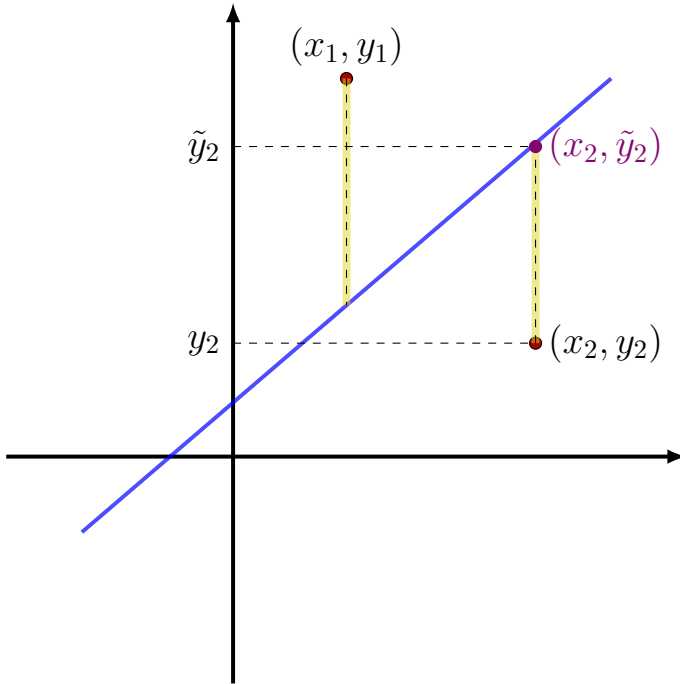
On va chercher la droite qui approxime au mieux nos données.



La droite est notre inconnue. On cherche une droite du type  $y = mx + h$  appelée *droite de régression*. Pour trouver la droite, on cherche une pente  $m \in \mathbb{R}$  et une hauteur  $h \in \mathbb{R}$ . La droite va minimiser la distance entre les points et la droite.

Il y a plusieurs distances que l'on peut considérer pour minimiser la distance entre les points et la droite. Le plus simple sera de prendre une distance entre les ordonnées. Une autre méthode serait de prendre une distance orthogonale, mais on ne traitera pas de cela dans ce cours (c'est plus compliqué).

Si on prend les distances en jaunes ci-dessous (c'est-à-dire la différence entre les ordonnées, les  $y$ ), nous obtiendrons une équation normale à résoudre.



Notre but est de trouver une matrice  $A$  et un vecteur  $\vec{b}$ , pour ensuite avoir une équation normale à résoudre  $A^T A \vec{x} = A^T \vec{b}$ .

Avec notre choix de distance, l'erreur entre  $(x_2, y_2)$  et  $(x_2, \tilde{y}_2)$  est  $y_2 - \tilde{y}_2$ . On cherche à minimiser la somme de toutes les distances de ce type. Comme nous avons une valeur absolue, c'est plus simple de mettre toutes les distances au carré et de prendre  $(y_2 - \tilde{y}_2)^2$ .

Cherchons maintenant la matrice  $A$  et le vecteur  $\vec{b}$  (le terme de droite).

On a  $y = mx + h$  donc  $\tilde{y}_2 = mx_2 + h$ . On peut faire cela pour toutes les données  $(x_i, y_i)$ . Les valeurs  $(x_i, \tilde{y}_i)$  sont les valeurs prédites, sur la droite de régression. On obtient la relation suivante :

$$\tilde{y}_i \text{ prédites} : mx_i + h \quad \text{et observées} : y_i$$

On a  $\vec{b}$  est ce que nous voulons approximer (nos valeurs connues) et  $\vec{x}$  notre inconnue. Ainsi

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} m \\ h \end{pmatrix}$$

La matrice  $A$  sera donnée par  $A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}$  et on aura  $A\vec{x} = \vec{b}$ .

Il s'agit d'un problème des moindres carrés :  $\hat{x}$  est la solution au sens des moindres carrés et vérifie

$$\|A\hat{x} - \vec{b}\|^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \tilde{y}_i)^2$$

**Exemple 6.47.**

Trouver la droite de régression  $y = mx + h$  qui approxime  $(2, 1), (2, 2), (0, -2), (4, 0)$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et } \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a

$$A^T A = \begin{pmatrix} 24 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{et } \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On résout et on obtient  $m = \frac{1}{2}$  et  $h = -\frac{3}{4}$ . Ainsi  $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$ .

## Chapitre 7 : matrices symétriques

### Objectifs.

- diagonaliser en base orthonormée
- calculer la décomposition spectrale d'une matrice ;
- faire une décomposition en valeurs singulière (SVD).

### 7.1 Diagonalisation des matrices symétriques

Dans le chapitre 5, nous avons vu la diagonalisation (pour des matrices pas nécessairement symétriques). Nous allons voir maintenant comment la diagonalisation se fait lorsque la matrice  $A$  est symétrique.

#### Rappel du chapitre 5

Soit  $A$  une matrice de taille  $n \times n$  pas forcément symétrique. Si  $A$  est semblable à une matrice diagonale, elle sera diagonalisable, c'est-à-dire : il existe  $P$  une matrice  $n \times n$  inversible et  $D$  diagonale,  $n \times n$  telles que

$$A = PDP^{-1}$$

#### Critère de diagonalisation

$A$  est diagonalisable si et seulement s'il existe  $n$  vecteurs propres linéairement indépendants.

Soient  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$  les  $n$  vecteurs propres linéairement indépendants de  $A$ . On a

$$P = (\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad \cdots \quad \vec{v}_n) \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

avec  $A\vec{v}_i = \lambda_i\vec{v}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$

*Remarque:*  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$  est une base de  $\mathbb{R}^n$  formée de vecteurs propres de  $A$ .

De plus on a

- 1)  $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$  est un polynôme de degré  $n$ .
- 2)  $p_A(\lambda)$  admet  $n$  racines (pas forcément réelles, ni distinctes) :  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$
- 3)  $p_A(\lambda)$  se factorise en

$$P_A(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)$$

**Théorème 5.23** (théorème spectral version 1). *Soit  $A$  une matrice  $n \times n$  symétrique. Alors  $A$  est diagonalisable.*

On va modifier ce théorème pour obtenir ce qu'on appellera le *théorème spectral*.

**Exemple 7.1.**

Soit  $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$  On a  $A^T = A$ , donc la matrice est symétrique.

On commence par trouver les valeurs propres de  $A$ . On a  $p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 17\lambda^2 - 90\lambda + 144$ . Il faut trouver les racines de ce polynôme de degré 3. On voit que 3 est une racine :  $p_A(3) = 0$ . On peut faire une division euclidienne de  $p_A(\lambda)$  par  $(\lambda - 3)$ .

On obtient  $p_A(\lambda) = -(\lambda - 3)(\lambda - 6)(\lambda - 8)$  et  $\lambda \in \{3, 6, 8\}$ .

Ensuite on trouve les espaces propres

$$E_3 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad E_6 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad E_8 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Ainsi  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  formée de vecteurs propres

de  $A$ . On a  $A = PDP^{-1}$  avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

On a  $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$ ,  $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = 0$  et  $\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = 0$ .

Donc  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  est une base orthogonale de  $\mathbb{R}^3$  formée de vecteurs propres de  $A$ . On peut normaliser la base et obtenir une base orthonormale de  $\mathbb{R}^3$  formée de vecteurs propres de  $A$  :

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

et

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

La matrice  $P$  est une matrice orthogonale, c'est-à-dire ses colonnes sont orthogonales (orthogonales entre elles et de norme 1), on a  $P^{-1} = P^T$ . Ainsi, la diagonalisation de  $A$  devient  $A = PDP^T$ .

### Diagonalisation en base orthonormale / orthonormée

Soit  $A$  une matrice  $n \times n$ . Alors si  $A$  est diagonalisable en base orthonormale, il existe  $P$  orthogonale,  $D$  diagonale telles que  $A = PDP^T$ . On va chercher les conditions sur  $A$  pour avoir une telle diagonalisation.

On voit rapidement que  $A$  sera symétrique. En effet

$$A^T = (PDP^T)^T = (P^T)^T D^T P^T = PDP^T = A$$

On obtient  $A$  diagonalisable en base orthonormale  $\rightarrow A$  est symétrique. On verra que  $A$  symétrique  $\rightarrow A$  diagonalisable en base orthonormale. On pourra alors trouver une base de  $\mathbb{R}^n$  formée de vecteurs propres de  $A$ .

**Théorème** (théorème spectral version 2)  *$A$  est une matrice  $n \times n$  symétrique si et seulement si  $A$  est diagonalisable en base orthonormée.*

*Remarque:*

- 1) si  $A$  n'est pas symétrique, alors elle n'est pas diagonalisable en base orthonormée.  $A$  pourra être diagonalisable, mais on n'arrivera pas à obtenir une base orthonormée. C'est l'orthogonalité entre les  $n$  vecteurs propres de  $A$  qu'on ne pourra obtenir.
- 2)  $P^{-1} = P^T$  et  $PP^T = P^T P = I_n$ . Tous les vecteurs propres choisis dans  $P$  sont orthogonaux entre eux et de norme 1. On obtient alors que deux vecteurs propres appartenant à des espaces propres distincts sont orthogonaux entre eux.

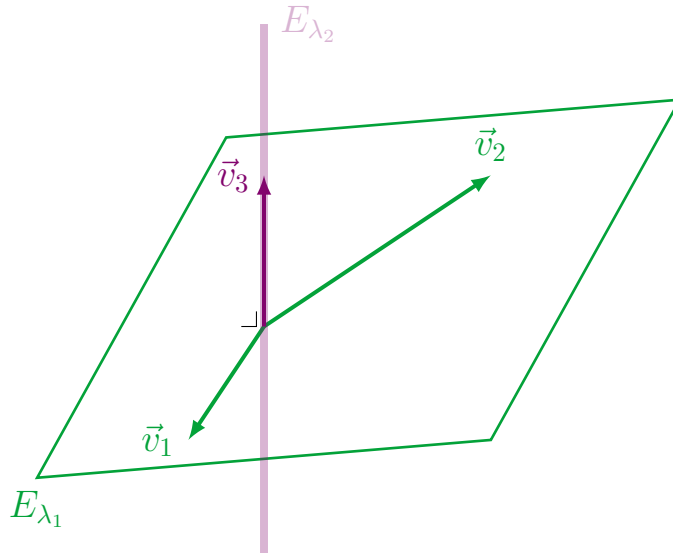
**Théorème 7.2.** *Soit  $A$  une matrice symétrique de taille  $n \times n$ . Alors deux vecteurs propres appartenant à des espaces propres différents sont orthogonaux.*

*Démonstration.* voir le cours. □

**Schéma du théorème 7.2** Soient  $E_{\lambda_1} = \text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$  et  $E_{\lambda_2} = \text{span}\{\vec{v}_3\}$ . On a que  $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = 0$  et  $\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = 0$ , par le théorème 7.2, mais par contre on n'a pas d'information sur  $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$ .

Si  $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$  alors on pourra prendre  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  comme base orthogonale formée de vecteurs propres de  $A$  puis ensuite normaliser et construire la matrice  $P$  orthogonale.

Si par contre,  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  ne sont pas orthogonaux, il faudra faire Gram-Schmidt sur  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$  et obtenir une base orthogonale de  $E_{\lambda_1}$ . Par Gram-Schmidt on sait que la nouvelle base sera toujours dans l'espace vectoriel de départ, ici  $E_{\lambda_1}$ , et donc que ça reste des vecteurs propres de  $A$ , associés à  $\lambda_1$ .



**Exemple 7.3.**

Soit  $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ .

On a  $p_A(\lambda) = -(\lambda - 7)^2(\lambda + 2)$ , donc  $\lambda \in \{-2, 7\}$  avec  $\lambda = 7$  de multiplicité algébrique 2. On cherche ensuite les espaces propres  $E_{-2}$  et  $E_7$ . On obtient

$$E_{-2} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad E_7 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

On appelle ces vecteurs,  $\vec{v}_1$  (pour  $E_{-2}$ ) et  $\vec{v}_2, \vec{v}_3$  (pour  $E_7$ ). Par le théorème 7.2, on sait que  $\vec{v}_1$  est orthogonal à  $\vec{v}_2, \vec{v}_3$ . Mais par contre  $\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = -\frac{1}{2}$  donc ils ne sont pas orthogonaux. Il faudra faire Gram-Schmidt sur  $\{\vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  et obtenir une base orthogonale de  $E_7$ . On pose

$$\vec{u}_2 = \vec{v}_2, \quad \text{et } \vec{u}_3 = \dots = \begin{pmatrix} -1/4 \\ 1 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

La famille  $\{\vec{u}_2, \vec{u}_3\}$  est une base de  $E_7$ , elle est orthogonale et  $\vec{u}_2, \vec{u}_3$  sont des vecteurs propres de  $A$  associé à  $\lambda = 7$  (car  $\vec{u}_i \in E_7$ !).

La famille  $\{\vec{v}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$  est une base orthogonale de  $\mathbb{R}^3$  formée de vecteurs propres de  $A$ . On normalise pour trouver les colonnes de  $P$  :

$$P = \begin{pmatrix} -2/3 & 1/\sqrt{3} & -1/3\sqrt{2} \\ -1/3 & 0 & 4/3\sqrt{2} \\ 2/3 & 1/\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

*Remarque:* On aura plusieurs diagonalisations possible, en fonction de l'ordre choisi pour les vecteurs, pour les valeurs propres, du sens des vecteurs (on peut prendre  $\vec{v}_i$  ou  $-\vec{v}_i$  dans les colonnes de  $P$ ) et pour l'ordre de Gram-Schmidt.

## 7.2 Le théorème spectral

Regardons les conditions et implications de la diagonalisation en base orthonormée. On part d'une matrice  $A$  symétrique et regardons ce que ça implique.

On sait que :  $A$  est symétrique si et seulement si  $A$  est diagonalisable en base orthonormée.

Prenons une matrice  $2 \times 2$  symétrique et étudions les valeurs propres de  $A$ .

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \rightarrow p_A(\lambda) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - b^2$$

On cherche  $\lambda$  telles que  $p_A(\lambda) = 0$ . Avec la formule du discriminant on obtient

$$\Delta = (a + d)^2 - 4(ad - b^2) = 4b^2 + (a - d)^2$$

Il s'agit de la somme de deux carrés, donc  $\Delta \geq 0$ , et on aura alors deux valeurs propres réelles (distinctes ou non).

**Théorème 7.4** (Théorème spectral). *Soit  $A$  une matrice  $n \times n$  symétrique. Alors on a*

1.  *$A$  admet  $n$  valeurs propres réelles, mais pas forcément distinctes.*
2. *Pour chaque valeur propre distincte on a  $\dim E_{\lambda_i} = m_i$  où  $m_i$  est la multiplicité algébrique de  $\lambda_i$ .*
3.  *$A$  est diagonalisable en base orthonormée.*
4. *Les espaces propres sont deux à deux orthogonaux.*

*Remarque:* Il ne s'agit pas d'énoncés équivalents. Si 1. ou 2. ou 4. cela n'implique pas  $A$  symétrique.

Dans les deux exemples ci-dessous,  $A$  n'est pas symétrique. Nous verrons alors que les 4 points du Théorème spectral 7.4 ne sont pas tous vérifiés.

**Exemple 7.5.**

Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  On a  $p_A(\lambda) = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 1)$  et  $\lambda \in \{-1, 1\}$  avec  $\lambda = -1$  de multiplicité algébrique 2. On a

$$E_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \text{et} \quad E_{-1} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Alors

1.  $A$  admet  $n$  valeurs propres réelles, mais pas forcément distinctes : oui nous avons deux valeurs propres réelles.
2. Pour chaque valeur propre distincte on a  $\dim E_{\lambda_i} = m_i$  où  $m_i$  est la multiplicité algébrique de  $\lambda_i$  : non, car ici nos deux espaces propres sont de dimension 1, et la multiplicité algébrique de  $\lambda = -1$  est 2. La matrice n'est pas diagonalisable.
3.  $A$  est diagonalisable en base orthonormée : non elle n'est pas diagonalisable, donc elle ne peut pas être diagonalisable en base orthonormée.
4. Les espaces propres sont deux à deux orthogonaux : oui nos deux espaces propres sont orthogonaux. Attention c'est le cas dans cet exemple, mais ce n'est pas toujours le cas, voir l'exemple 7.6.

**Exemple 7.6.**

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ .

On a  $\lambda \in \{-2, 1\}$  avec  $\lambda = -2$  de multiplicité algébrique 2. On a

$$E_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \text{et} \quad E_{-2} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Appelons les vecteurs  $\vec{v}_1$  (pour  $E_1$ ) et  $\vec{v}_2, \vec{v}_3$  (pour  $E_{-2}$ ).

Alors

1.  $A$  admet  $n$  valeurs propres réelles, mais pas forcément distinctes : oui nous avons deux valeurs propres réelles.
2. Pour chaque valeur propre distincte on a  $\dim E_{\lambda_i} = m_i$  où  $m_i$  est la multiplicité algébrique de  $\lambda_i$  : oui, car  $\dim E_1 = 1$  et  $\dim E_{-2} = 2$ . La matrice est diagonalisable.
3.  $A$  est diagonalisable en base orthonormée : non elle n'est pas diagonalisable en base orthonormée. On a que  $E_1$  et  $E_{-2}$  ne sont pas orthogonaux. Elle sera diagonalisable, mais nous ne pourrions pas trouver une base orthogonale de  $\mathbb{R}^3$  formée de vecteurs propres de  $A$ .
4. Les espaces propres sont deux à deux orthogonaux : non, nos deux espaces propres sont orthogonaux.

### 7.3 Décomposition spectrale

Si  $A$  est symétrique on a  $A = PDP^T$  avec  $P = (\vec{u}_1 \vec{u}_2 \cdots \vec{u}_n)$  et

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Alors

$$\begin{aligned} A &= PDP^T \\ &= (\vec{u}_1 \vec{u}_2 \cdots \vec{u}_n) D (\vec{u}_1 \vec{u}_2 \cdots \vec{u}_n)^T \\ &= (\lambda_1 \vec{u}_1 \ \lambda_2 \vec{u}_2 \cdots \lambda_n \vec{u}_n) \begin{pmatrix} \vec{u}_1^T \\ \vec{u}_2^T \\ \vdots \\ \vec{u}_n^T \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On obtient alors

$$A = \lambda_1 \vec{u}_1 \vec{u}_1^T + \lambda_2 \vec{u}_2 \vec{u}_2^T + \cdots + \lambda_n \vec{u}_n \vec{u}_n^T$$

On appelle cette décomposition, la *décomposition spectrale*. On a  $\vec{u}_i \vec{u}_i^T$  une matrice  $n \times n$  de rang 1.

#### Exemple 7.7.

Soit  $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ . On a une diagonalisation en base ON :

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}}_P \underbrace{\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}_D \underbrace{\begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}}_{P^T}$$

La décomposition spectrale est  $A = 8\vec{u}_1 \vec{u}_1^T + 3\vec{u}_2 \vec{u}_2^T$ . On étudie  $\vec{u}_1 \vec{u}_1^T$  :

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 \vec{u}_1^T &= \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4/5 & 2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \vec{u}_1 & \frac{1}{\sqrt{5}} \vec{u}_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

C'est une matrice de rang 1 car les colonnes sont colinéaires.

## 7.4 Décompositions en valeurs singulières

Soit  $A$  une matrice  $m \times n$  ( $m \neq n$ ). Dans ce cas, il n'existe pas de factorisation  $A = PDP^{-1}$ , avec  $D$  diagonale et  $P$  inversible. (Notons que pour des matrices carrées, on pourrait aussi se retrouver sans diagonalisation).

On va voir qu'on peut factoriser  $A$  en :

$$A = U\Sigma V^\top$$

$U, V$  orthogonales (donc carrées) et  $\Sigma$  diagonale par blocs.

### Valeurs singulières

Soit  $A$  une matrice  $m \times n$ . On sait que  $A^T A$  est  $n \times n$  et symétrique. Donc  $A^T A$  est diagonalisable en base orthonormée.

On a l'existence d'une base orthonormée  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$  de  $\mathbb{R}^n$  formée de vecteurs propres de  $A^T A$ .

Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  les valeurs propres de  $A^T A$  (elles sont toutes réelles, voir le Théorème 7.4) :  $A^T A \vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i$ . On pourrait avoir  $\lambda_i = \lambda_j$ .

On a  $\|A \vec{v}_i\|^2 = \lambda_i$  donc  $\lambda_i \geq 0$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ . On peut alors organiser les valeurs propres par ordre décroissant  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$ .

**Définition 7.8** (valeurs singulières).

Soit  $A$  une matrice  $m \times n$ , les *valeurs singulières* de  $A$  sont les racines des valeurs propres de  $A^T A$ . On les note  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ , on a  $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$  et  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$ .

*Remarque:* Si  $\lambda_i = \|A \vec{v}_i\|^2$  alors  $\sigma_i = \|A \vec{v}_i\|$ , pour tout  $i = 1, \dots, n$ .

**Exemple 7.9.**

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$  On a  $A^T A = \begin{pmatrix} 9 & -9 \\ -9 & 9 \end{pmatrix}$  et  $\lambda \in \{0, 18\}$ . On a  $\lambda_1 = 18$ ,

$\lambda_2 = 0$  et les valeurs singulières de  $A$  sont  $\sigma_1 = 3\sqrt{2}$  et  $\sigma_2 = 0$ .

**Théorème 7.10.** Soit  $A$  une matrice  $m \times n$  et soient  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$  une base orthonormée de  $\mathbb{R}^n$  formées de vecteurs propres de  $A^T A$ . Soient  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$  les valeurs propres correspondantes. Supposons que  $A$  possède  $r$  valeurs singulières non-nulles, alors  $\{A \vec{v}_1, \dots, A \vec{v}_r\}$  est une base orthogonale de  $\text{Im}(A)$  et  $\text{rank}(A) = r$ .

## Décomposition en valeurs singulières (SVD)

La matrice  $\Sigma$  est diagonale par blocs et sera du type

$$\Sigma = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où  $D$  est  $r \times r$  avec les valeurs singulières positives sur la diagonale.

**Théorème 7.11** (SVD). *Soit  $A$  une matrice  $m \times n$  de rang  $r$ . Il existe une matrice  $\Sigma$ ,  $m \times n$  diagonale par blocs, une matrice  $U$ ,  $m \times m$  orthogonale et  $V$ ,  $n \times n$  orthogonale telles que*

$$A = U\Sigma V^T.$$

*De plus  $\Sigma = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  avec  $D$ ,  $r \times r$  diagonale avec les valeurs singulières  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$  sur la diagonale.*

*Remarque:* La décomposition SVD n'est pas unique, par contre  $\Sigma$  oui.

On cherche à avoir

$$A = U\Sigma V^T$$

avec

- $U$  orthogonale, de taille  $m \times m$  :  $U^T = U^{-1}$
- $V$  orthogonale, de taille  $n \times n$  :  $V^T = V^{-1}$
- la famille  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$  forme une base orthonormale de  $\mathbb{R}^n$  formée de vecteurs propres de  $A^T A$ .
- $\lambda_i = \vec{v}_i^T A^T A \vec{v}_i = (A \vec{v}_i)^T A \vec{v}_i$
- la famille  $\{A \vec{v}_1, \dots, A \vec{v}_r\}$  est une base orthogonale de  $\text{Im}(A)$ .
- on peut normaliser la base orthogonale de  $\text{Im}(A)$  en prenant  $\frac{\|A \vec{v}_i\|}{\|A \vec{v}_i\|}$ . On obtient une base orthonormale de  $\text{Im}(A)$ .
- $\sigma_i = \|A \vec{v}_i\|$

**Exemple 7.12.**

soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

Les valeurs propres de  $A^T A$  sont  $\lambda_1 = 18$  et  $\lambda_2 = 0$ . On a  $\sigma_1 = 3\sqrt{2}$ ,  $\sigma_2 = 0$ .  
Les espaces propres associés à  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont (après normalisation)

$$E_{18} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\} \quad \text{et} \quad E_0 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$$

On a  $E_{18} \perp E_0$  car  $A^T A$  est symétrique, voir le théorème Spectral 7.4.

On a

$$V = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (\text{on a } V^T = V^{-1})$$

On a  $A = U\Sigma V^T$ , avec

$$\underbrace{A}_{3 \times 2} = \underbrace{U}_{3 \times 3} \underbrace{\Sigma}_{3 \times 2} \underbrace{V^T}_{2 \times 2}$$

On a

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ici  $D$  est  $1 \times 1$  et  $D = (3\sqrt{2})$ .

Construisons la matrice  $U$ . On doit prendre  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r\}$  où  $r =$  nombre de valeurs singulières non-nulles. Ici  $r = 1$ . On a

$$A\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{2} \\ -4/\sqrt{2} \\ 4/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Comme  $\sigma_2 = 0$  on a seulement  $\{\vec{u}_1\}$  comme base de  $\text{Im}(A)$ .

En effet, si on calcule  $A\vec{v}_2$  on a  $A\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . On voit qu'on ne peut pas considérer

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  dans notre base de  $\text{Im}(A)$  car  $\{\vec{u}_1, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$  n'est pas une famille linéairement indépendante.

Comme  $U$  doit être  $3 \times 3$ , on doit compléter  $\{\vec{u}_1\}$  avec deux vecteurs, pour obtenir une base orthonormée de  $\mathbb{R}^3$ . C'est ici le point délicat de la SVD.

On commence par normaliser  $A\vec{v}_1$  :

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\|A\vec{v}_1\|} A\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

On cherche  $\vec{u}_2, \vec{u}_3$  tels que  $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$ ,  $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 = 0$  et  $\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 = 0$ .

Des deux premiers produits scalaires on a :

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff x - 2y + 2z = 0$$

On trouve une équation linéaire à 3 inconnues, on a  $y, z$  des variables libres.

On choisit  $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  (pour  $y = 1, z = 0$ ) et  $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  (pour  $y = 0, z = 1$ ).

On a  $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$ ,  $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 = 0$  mais  $\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 \neq 0$ .

On doit faire Gram-Schmidt sur  $\{\vec{u}_2, \vec{u}_3\}$  pour obtenir une base orthonormale.

On obtient  $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{45} \\ 4/\sqrt{45} \\ 5/\sqrt{45} \end{pmatrix}$

Finalement

$$U = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/\sqrt{5} & -2/\sqrt{45} \\ -2/3 & 1/\sqrt{5} & 4/\sqrt{45} \\ 2/3 & 0 & 5/\sqrt{45} \end{pmatrix}$$