Série 14

Cette série suit les chapitres 6 et 7 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay.

Mots-clés : *diagonalisation en base orthonormée, décomposition spectrale, SVD*

Remarques :

1. il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours ;
2. il peut arriver que certaines questions soient reliées au cours du jeudi.

Exercice 1

Soit A une matrice réelle de taille $n \times n$. Montrer que si $A = A^T$, alors pour tout $x \in \mathbb{C}^n$ le nombre $\overline{x}^T Ax$ est réel. En déduire que les valeurs propres d'une matrice réelle et symétrique sont réelles.

Exercice 2

Déterminer l'équation $y = ax + b$ de la droite de régression correspondant aux points $(3, 2)$, $(-1, 2)$, $(2, 1)$, $(0, 3)$.

Exercice 3

Soit A une matrice symétrique inversible. Montrer qu'alors l'inverse de A est aussi symétrique.

Contrairement au solutionnaire, on vous recommande ici d'utiliser le théorème spectral.

Exercice 4

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Diagonaliser A en base orthonormée.

Exercice 5

Diagonaliser les matrices suivantes sous la forme $A = QDQ^T$, avec Q une matrice orthogonale.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 6

Soit A une matrice symétrique de taille $n \times n$.

i) Montrer qu'il existe une base orthonormale $\{u_1, \ldots, u_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$A = \lambda_1 u_1 u_1^T + \lambda_2 u_2 u_2^T + \ldots + \lambda_n u_n u_n^T.$$

ii) Calculer la décomposition ci-dessus pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 7

Chercher une décomposition en valeurs singulières des matrices suivantes.

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$,

ii) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

Exercice 8

Soit A une matrice de taille $n \times n$.

i) Montrer que A est inversible si et seulement si A possède n valeurs singulières non nulles.

ii) Si A est inversible et $U\Sigma V^T$ est une décomposition en valeurs singulières de A, donner une décomposition en valeurs singulières de A^{-1}.

Exercice 9

Trouver une décomposition en valeurs singulières des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercices additionnels

Exercice 10

Soit W le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $\overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer et décrire $W^\perp$.
2. Vérifier que $\dim(W) + \dim(W^{\perp)} = 4$.

Exercice 11

Soit $A = (\overrightarrow{a}_1 \dots \overrightarrow{a}_n)$ une matrice $m \times n$ dont les colonnes sont linéairement indépendantes. Soient $Q = (\overrightarrow{q}_1 \dots \overrightarrow{q}_n)$ et $R = (\overrightarrow{r}_1 \dots \overrightarrow{r}_n)$ les matrices obtenues de la factorisation QR.

a) Montrer que $\overrightarrow{a}_i = r_{1i}\overrightarrow{q}_1 + r_{2i}\overrightarrow{q}_2 + \dots r_{ii}\overrightarrow{q}_i$. On obtient que les colonnes de A sont des combinaisons linéaires des colonnes de Q avec comme coefficients les composantes de R.
(**Indication** : utilisez $\overrightarrow{a}_i = Q\overrightarrow{r}_i$)

b) Trouver la factorisation QR de la matrice A ci-dessous, en utilisant le point précédant pour trouver la matrice R.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque : pour trouver R on peut aussi utiliser $R = Q^T A$ mais ici vous voyez une manière alternative.

Réponses de certains exercices:

<u>Exercices additionnels</u>
