

---

## Série 12

Cette série suit le chapitre 6 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay.

Mots-clés : *orthogonalité*

### Remarques :

1. il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours ;
2. il peut arriver que certaines questions soient reliées au cours du jeudi.

---

### Exercice 1

Existe-t-il une matrice  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,  $b \neq 0$ , diagonalisable et ne possédant qu'une seule valeur propre de multiplicité 2 ?

### Exercice 2

- a) Montrer que si  $\lambda$  est une valeur propre d'une matrice inversible  $A$  de taille  $n \times n$ , alors  $\lambda^{-1}$  est une valeur propre de  $A^{-1}$ . Trouver un vecteur propre correspondant.
- b) Montrer que  $A$  et  $A^T$  ont les mêmes valeurs propres. Montrer par un contre-exemple que les vecteurs propres de  $A$  et  $A^T$  ne sont pas les mêmes en général.

### Exercice 3

Soit  $A$  une matrice réelle de taille  $n \times n$ . Montrer que si  $\lambda \in \mathbb{C}$  est une valeur propre de  $A$ , alors  $\bar{\lambda} \in \mathbb{C}$  est aussi une valeur propre de  $A$ .

### Exercice 4

Soit  $A$  une matrice de taille  $m \times n$ .

- a) Montrer que  $\text{Ker} A = \text{Ker}(A^T A)$ .
- b) Montrer que  $A^T A$  est inversible si et seulement si les colonnes de  $A$  sont linéairement indépendantes.

### Exercice 5

Soit  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  un produit scalaire sur  $\mathbb{R}^2$  défini par

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 4u_1v_1 + 5u_2v_2.$$

Soient  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 \end{pmatrix}$ . Calculez  $\|\vec{v}_1\|$  et  $\|\vec{v}_2\|$ , ainsi que  $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$

### Exercice 6

Soient  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ . Montrer que

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta,$$

où  $\theta$  est l'angle entre les deux vecteurs à l'origine.

**Indication** utiliser la loi des cosinus :  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)$  où  $a, b, c$  sont les longueurs des cotés d'un triangle et  $\gamma$  est l'angle opposé au côté de longueur  $c$ .

### Exercice 7

Soit  $A$  une matrice  $n \times n$  inversible. Montrer que la formule  $(\vec{u} | \vec{v}) = (A\vec{u}) \cdot (A\vec{v}) = \vec{u}^T A^T A \vec{v}$  définit un produit scalaire dans  $\mathbb{R}^n$ .

### Exercice 8

a) Trouver un vecteur non nul orthogonal à  $\vec{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

b) Soient  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Calculer

$$\vec{u} \cdot \vec{v}, \quad \vec{v} \cdot \vec{w}, \quad \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\|}, \quad \frac{1}{\vec{w} \cdot \vec{w}} \vec{w}, \quad \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\|} \vec{v}.$$

c) Calculer la distance entre  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et la distance entre  $\vec{u}$  et  $\vec{w}$ .

d) Calculer les vecteurs unitaires correspondant à  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  (pointant dans la même direction que le vecteur original).

### Exercice 9

Soit  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Donner l'ensemble  $W$  des vecteurs orthogonaux à  $\vec{v}$ . Est-ce un espace vectoriel ? Si oui, de quelle dimension ?

### Exercice 10

Soient  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$  et  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$  deux bases orthonormales de  $\mathbb{R}^n$ . On définit les matrices de taille  $n \times n$ ,  $U = (\vec{u}_1 \dots \vec{u}_n)$  et  $V = (\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n)$ . Montrer que  $U^T U = I_n$ ,  $V^T V = I_n$  et que  $UV$  est inversible.

**Exercice 11**

Soient  $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

- a) Vérifier que  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$  sont orthogonaux.
- b) Calculer la projection orthogonale  $\vec{p}_W(\vec{v})$  de  $\vec{v}$  sur  $W = \text{Span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ .
- c) Donner la décomposition  $\vec{v} = \vec{z} + \vec{p}_W(\vec{v})$ , où  $\vec{z} \in W^\perp$ .

Même question pour  $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

Même question pour  $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 12**

Soit  $W$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_q\}$  une base orthogonale de  $W$ . Soit  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r\}$  une base orthogonale de  $W^\perp$ .

Montrer que  $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_q, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r\}$  est orthogonale et prouver la relation

$$\dim W + \dim W^\perp = n.$$

**Exercice 13**

Soit  $V = C[-1, 1] = \{f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ continue}\}$ . On munit  $V$  du produit scalaire

$$(f|g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt.$$

Déterminer une base orthonormale du sous-espace vectoriel de  $V$  suivant :

$$\mathbb{P}_2 = \text{span}\{1, t, t^2\}.$$

**Exercice 14**

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

- a) Soit  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne. Alors pour un vecteur  $\vec{v}$ ,  $\|c\vec{v}\| = c\|\vec{v}\|$  quel que soit le scalaire  $c$ . □ □
- b) Deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux si et seulement si

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2.$$

□ □

- c) Si un vecteur  $\vec{v}$  est orthogonal à tous les vecteurs sauf un d'une base d'un sous-espace  $W$ , alors  $\vec{v}$  appartient à  $W^\perp$ . □ □
- d) Soit  $W$  un sous-espace d'un espace vectoriel  $V$ . Si la dimension de l'espace  $W^\perp$  est égale à 1, alors on peut trouver une base de  $V$  formée par des vecteurs de  $W$ . □ □

### Exercices additionnels

#### Exercice 15

Soit  $x, y, z$  des inconnues. On considère le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cos x + \cos y + 2\cos z = 3 \\ 2\cos x - 2\sqrt{2}\cos y + 2\cos z = 1 - \sqrt{2} \\ \cos x + \cos y - \sqrt{2}\cos z = 1 \end{cases}$$

En posant  $X = \cos x$ ,  $Y = \cos y$  et  $Z = \cos z$ , et en substituant dans le système original, on obtient un système d'équations linéaires aux inconnues  $X, Y$  et  $Z$ . Utiliser l'algorithme de Gauss pour résoudre ce système et ensuite en déduire les valeurs de  $x, y$  et  $z$  dans l'intervalle  $[0; \frac{\pi}{2}]$  qui satisfont au système initial.

#### Exercice 16

Soit  $A$  une matrice  $n \times n$  telle que  $A^3 = 0$ . Montrer que  $I_n - A$  est inversible et que son inverse est donné par  $(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2$ .

#### Exercice 17

Soit  $A$  une matrice  $n \times n$ . Montrer que si deux lignes de  $A$  sont identiques, alors  $\det(A) = 0$ . Que peut-on dire si deux colonnes sont identiques ?

#### Exercice 18

On considère la transformation  $T : \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{P}_2$  définie par

$$T(a + bt + ct^2 + dt^3) = (a + b + c + d) + (a + b)t + (c + d)t^2.$$

- a) Vérifier que  $T$  est linéaire.
- b) Trouver la dimension et une base de  $\text{Im}T$ .
- c) Vérifier que le polynôme  $7 + 5t + 2t^2$  est bien dans l'image de  $T$  et donner ses coordonnées dans la base trouvée en (b).

- d) Trouver la dimension et une base de  $\text{Ker}T$ .
- e) Vérifier que le polynôme  $2 - 2t - 5t^2 + 5t^3$  est bien dans le noyau de  $T$  et donner ses coordonnées dans la base trouvée en (d).
- 

**Réponses de certains exercices:**

**Exercices additionnels**

**Ex-15**  $x = \frac{\pi}{4}, y = 0$  et  $z = \frac{\pi}{3}$ .

---

Copyright © Prof(s). de la section de mathématiques EPFL (Assyr Abdulle, Jérôme Scherer, ...). Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre: D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications*. De Boeck, Bruxelles, 2005.