Série 11

Cette série suit le chapitre 5 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay.

Mots-clés : *valeurs et vecteurs propres, diagonalisation*

Remarques :

1. il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours ;
2. il peut arriver que certaines questions soient reliées au cours du jeudi.

Exercice 1

Déterminer lesquelles, parmi les matrices suivantes, sont diagonalisables :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

Démontrer ou trouver un contre-exemple. Soient $n \geqslant 2$ et $k \geqslant 2$ entiers.

a) Si A est une matrice $n \times n$ diagonalisable, alors A^k est diagonalisable.
b) Si A est une matrice $n \times n$ et A^k est diagonalisable, alors A est diagonalisable.

Exercice 3

Soit A une matrice de taille $n \times n$ et $k \geqslant 2$ un entier. Montrer que si λ est une valeur propre de A avec pour vecteur propre $\overrightarrow{v}$, alors λ^k est une valeur propre de

$$A^k = \underbrace{A\,A \cdots A}_{k \text{ fois}}$$

avec pour vecteur propre $\overrightarrow{v}$.

Exercice 4

Calculer pour les matrices suivantes les valeurs propres et une base de chaque espace propre dans $\mathbb{C}^2$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5

Toute matrice A de taille $n \times n$ a un polynôme caractéristique p_A qui peut s'écrire sous forme factorisée comme suit : $p_A(t) = (\lambda_1 - t) \cdots (\lambda_n - t)$, où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les n valeurs propres de A (réelles ou complexes, et pas forcément toutes différentes).

Montrez que $\det(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$ et que $\operatorname{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$

Exercice 6

Soit A une matrice 3×3 et a un nombre réel. On suppose que

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} = a_{21} + a_{22} + a_{23} = a_{31} + a_{32} + a_{33} = a$$

Calculer $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et conclure que a est une valeur propre de A.

Exercice 7

Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que 0 et 6 sont des valeurs propres de A et calculer les espaces propres associés.

Exercice 8

Soit $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices symétriques de taille 2×2, dont une base est donnée par $\mathcal{B} = \{S_1, S_2, S_3\}$ où

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $T : \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ la transformation linéaire définie par

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a - d & -b \\ -b & -a + 2d \end{pmatrix}.$$

a) Calculer les 3 valeurs propres (distinctes) $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ de T.
b) Trouver un vecteur propre $M_i \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ associé à chaque λ_i. Montrer que $\mathcal{B}' = \{M_1, M_2, M_3\}$ est une base de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.
c) Ecrire la matrice de T par rapport à la base $\mathcal{B}'$.
d) Calculer $T^{10}(A)$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 9

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les valeurs propres de A.
2. Calculer les vecteurs propres de A.
3. Soit P la matrice dont les colonnes sont des vecteurs propres de A (associés à des valeurs propres *différentes*). Calculer $P^{-1}AP$, et interpréter le résultat.
4. Calculer A^{1000}.

Exercice 10

Soit A une matrice de taille $n \times n$. Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses (justifier).

		V	F
a)	A est diagonalisable si et seulement si elle possède n valeurs propres distinctes.	☐	☐
b)	A est diagonalisable si A possède n vecteurs propres.		
c)	Si A est diagonalisable, alors A est inversible.	☐	☐
d)	Si A est inversible, alors A est diagonalisable.	☐	☐
e)	Si 0 est valeur propre, alors $\operatorname{rang}(A) < n$.	☐	☐
f)	Pour tout matrice inversible P de taille $n \times n$, λ est une valeur propre de A si et seulement si λ est une valeur propre de $P^{-1}AP$.	☐	☐

Exercice 11

a. Soit A une matrice de taille 3×3 inversible et λ une valeur propre de A.

☐ Alors λ^{-1} est une valeur propre de $-A$.

☐ Alors λ est une valeur propre de $-A$.

☐ Alors λ^{-1} est une valeur propre de A^{-1}.

☐ Alors λ est une valeur propre de A^{-1}.

b. Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

☐ Alors seulement 6 est une valeur propre de A.

☐ Alors -6 et -4 sont valeurs propres de A.

☐ Alors 6 et 0 sont valeurs propres de A.

☐ Alors -4 et 6 sont valeurs propres de A.

c. Soit $\mathcal{B} = (1-t, 1+t, 1+t+t^2)$ et $\mathcal{C} = (1, t-\frac{1}{2}, t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4})$.

☐ Alors $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{P}_2$, mais pas $\mathcal{C}$.

☐ Alors $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{P}_2$, et $\mathcal{C}$ aussi.

☐ Alors $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{P}_2$, mais pas $\mathcal{B}$.

☐ Alors $\mathcal{B}$ n'est pas une base de $\mathbb{P}_2$, et $\mathcal{C}$ non plus.

d. Soit $\mathcal{B} = (1-t, 1+t, 1+t+t^2)$ et $\mathcal{C} = (1, t-\frac{1}{2}, t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4})$. Soit encore S la matrice de changement de base de B à C et soit T la matrice de changement de base de C à B.

☐ Alors $s_{13} = 0$ et $t_{23} = 0$.

☐ Alors $s_{13} = 9/16$ et $t_{23} = 3/2$.

☐ Alors $s_{13} = -1$ et $t_{23} = -3/4$.

☐ Alors $s_{13} = 3/2$ et $t_{23} = -9/8$.

e. Soit A une matrice de taille 2×2 qui n'est pas inversible. Alors

☐ 0 est une valeur propre de A.

☐ A est la matrice nulle.

☐ A n'a pas de valeur propre réelle.

☐ tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ est un vecteur propre de A.

<u>Exercices additionnels</u>

Exercice 12

Parmi les matrices suivantes, indiquer celles qui sont diagonalisables (toujours en justifiant), et le cas échéant, diagonaliser ces matrices et exhiber les vecteurs propres.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$
$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \; E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13

Soient A et B deux matrices carrées $n \times n$ telles que $A^2 = B^2 = 0$. Montrer qu'en général $(A+B)(A-B) \neq 0$.

Est-ce qu'il y a des cas où l'égalité peut être vraie ?

Réponses de certains exercices:

<u>Exercices additionnels</u>
