

Série 10

Cette série suit les chapitres 4 et 5 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay.

Mots-clés : *bases, coordonnées, changement de base, valeurs et vecteurs propres*

Remarques :

1. il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours ;
2. il peut arriver que certaines questions soient reliées au cours du jeudi.

Exercice 1

Soit $\vec{T} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire donnée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x_1 + x_3 \\ 2x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

Soient E la base canonique de \mathbb{R}^3 et B une base de \mathbb{R}^3 donnée par

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

- a) Donner la matrice M qui représente T par rapport aux bases E (de départ) et B (d'arrivée).
- b) Même question pour les bases B (de départ) et E (d'arrivée).
- c) Même question pour les bases B (de départ) et B (d'arrivée).

Exercice 2

- a) Soit A une matrice 5×6 . Si $\dim(\text{Ker}A) = 3$, quel est le rang de A ?
- b) Soit A une matrice 7×3 . Quel est le rang maximum de A ? Quelle est la dimension minimum de $\text{Ker}A$? Même question si A est une matrice 3×7 .
- c) Soit A une matrice $n \times n$. Donner une condition sur $\text{rang}(A)$ pour que A^T soit inversible.
- d) Soit $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une transformation linéaire telle que $T \circ T \circ T = I_3$ (l'application identité). Quelle est la dimension de $\text{Ker}T$?

Exercice 3

Soit \mathcal{F} l'ensemble formé des quatre premiers polynômes de Hermite :

$$\mathcal{F} = (1, 2t, -2 + 4t^2, -12t + 8t^3).$$

- Montrer que \mathcal{F} forme une base de \mathbb{P}_3 .
- Quelles sont les coordonnées $[y(t)]_{\mathcal{F}}$ du polynôme $y(t) = 7 - 12t - 8t^2 + 12t^3$?

Remarque. Les polynômes de Hermite sont utiles lors de l'étude d'équations différentielles que l'on rencontre dans des problèmes de physique. Ils se construisent facilement à l'aide de relations de récurrence.

Exercice 4

Trouver la dimension du sous-espace H défini par :

$$H = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \vec{x} = \begin{pmatrix} a - 3b + 6c \\ 5a + 4d \\ b - 2c - d \\ 5d \end{pmatrix}, \text{ où } a, b, c, d \in \mathbb{R} \}$$

Exercice 5

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 9 & -7 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 5 & -6 & 10 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Montrer que les matrices A et B sont équivalentes (selon les lignes). (**Indication** : quelle est la forme échelonnée et réduite des deux matrices?)
- Calculer le rang de A et $\dim(\text{Ker}A)$.
- Trouver une base pour chacun des sous-espaces $\text{Im}A$, $\text{Ker}A$ et $\text{Ker}A^T$, ainsi que du sous-espace $\text{Lgn}(A)$ engendré par les lignes de A .

Exercice 6

On considère la transformation $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$T(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(0) \end{pmatrix}$$

- Vérifier que T est linéaire.
- Trouver la dimension et une base de $\text{Im}T$.
- Appliquer le Théorème du rang pour trouver la dimension du noyau de T .
- Vérifier le résultat de c) en trouvant une base de $\text{Ker}T$.

Exercice 7

Soit A une matrice de taille $m \times n$. Démontrer que $A\vec{x} = \vec{b}$ admet une solution pour tout \vec{b} dans \mathbb{R}^m si et seulement si $A^T\vec{y} = \vec{0}$ n'admet que la solution triviale $\vec{y} = \vec{0}$.

Exercice 8

1. Soit $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 3y \\ x - y \end{pmatrix}.$$

- Donner la matrice A de l'application linéaire T par rapport aux bases canoniques E de \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 .
- Donner la matrice B de l'application linéaire T par rapport aux bases

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ de } \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ de } \mathbb{R}^3.$$

2. Soit $T: \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie par $T(C) = X \cdot C$, où X est la matrice de taille 2×2

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

- Donner la matrice A de l'application linéaire T par rapport à la base canonique de $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.
- Donner la matrice B de l'application linéaire T par rapport à la base

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \right\} \text{ de } \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}).$$

$$\text{On cherche } B = \left([T(B_1)]_{\mathcal{B}} \quad [T(B_2)]_{\mathcal{B}} \quad [T(B_3)]_{\mathcal{B}} \quad [T(B_4)]_{\mathcal{B}} \right).$$

Exercice 9

a) Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \\ -4 & 12 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$.

- $\text{Ker}A$ est un sous-espace de \mathbb{R}^4 de dimension 0.
- $\text{Ker}A$ est un sous-espace de \mathbb{R}^2 de dimension 0.
- $\text{Ker}A$ est un sous-espace de \mathbb{R}^4 de dimension 1.
- $\text{Ker}A$ est un sous-espace de \mathbb{R}^2 de dimension 1.

b) On considère les polynômes $p(t) = (1 - t)(1 + t) = 1 - t^2$ et $q(t) = (1 + t)(1 + t) = 1 + 2t + t^2$ de \mathbb{P}_2 .

Les polynômes p et q sont linéairement indépendants.

Les polynômes p et q forment une base de \mathbb{P}_2 .

Le polynôme $q - p$ est le polynôme nul.

$(1 + t)p - (1 - t)q$ est une combinaison linéaire de p et q .

c) Soit W l'hyperplan dans \mathbb{R}^6 donné par l'équation $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0$. On

considère les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

On peut compléter $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ en une base de W composée de 5 vecteurs.

On peut compléter $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ en une base de W composée de 6 vecteurs.

On peut compléter $\{\vec{a}, \vec{c}\}$ en une base de W composée de 5 vecteurs.

On peut compléter $\{\vec{a}, \vec{c}\}$ en une base de W composée de 6 vecteurs.

d) Soit V un espace vectoriel et v_1, \dots, v_k des vecteurs de V .

Si la famille $\{v_1, \dots, v_k\}$ est libre, alors $\dim V = k$.

Si la famille $\{v_1, \dots, v_k\}$ est libre, alors $\dim V \geq k$.

Si la famille $\{v_1, \dots, v_k\}$ engendre l'espace vectoriel V , alors $\dim V = k$.

Si la famille $\{v_1, \dots, v_k\}$ engendre l'espace vectoriel V , alors $\dim V \geq k$.

e) Soit $\text{Tr}: \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ l'application linéaire "trace" définie par

$$\text{Tr} \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = a + d.$$

Le noyau de Tr est un sous-espace de $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ de dimension 1.

Le noyau de Tr est un sous-espace de $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ de dimension 2.

Le noyau de Tr est un sous-espace de $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ de dimension 3.

Le noyau de Tr est un sous-espace de $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ de dimension 4.

f) Soit $\text{Tr}: \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ l'application linéaire "trace" définie à la question f. Les matrices suivantes forment une base du noyau de Tr :

$$\square \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\square \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$\square \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$\square \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercice 10

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -15 & 1 & -9 \\ 0 & 6 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

- Est-ce que $\lambda = 6$ est une valeur propre de A ?
- Même question avec $\lambda = 1$ et $\lambda = -9$.

Exercice 11

Le *polynôme caractéristique* d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la fonction $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$. Comme vous le constaterez, c'est en effet toujours un polynôme de degré n . Les valeurs propres de A sont exactement les racines de p_A .

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\text{et } E = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 17 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer le polynôme caractéristique, les valeurs propres et les vecteurs propres de chacune de ces matrices A, B, C, D, E .

Exercices additionnels

Exercice 12

Trouver une base de l'espace engendré par les vecteurs suivants :

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13

Pour chacun des systèmes suivants

$$1. \begin{cases} x + y + 2z + 3w = 13 \\ x - 2y + z + w = 8 \\ 3x + y + z - w = 1 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} 2x + y + z - 2w = 1 \\ 3x - 2y + z - 6w = -2 \\ x + y - z - w = -1 \\ 6x + z - 9w = -2 \\ 5x - y + 2z - 8w = 3 \end{cases}$$

- Écrire la matrice augmentée correspondante (pour l'ordre des inconnues x, y, z, w).
- Mettre cette matrice sous forme échelonnée réduite.
- Déterminer la solution générale du système.

Exercice 14

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 8 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ecrire l'ensemble solution de l'équation $A\vec{x} = \vec{0}$ sous forme paramétrique vectorielle.

Réponses de certains exercices:

Exercices additionnels

$$\text{Ex-14} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{pour } s, t, u \in \mathbb{R}$$

Copyright © Prof(s). de la section de mathématiques EPFL (Assyr Abdulle, Jérôme Scherer, ...). Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre: D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications*. De Boeck, Bruxelles, 2005.