

Exemple 6.31.

Soient $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Interprétation géométrique de la distance minimale



Théorème 6.32 (de la meilleure approximation). *Soient W un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n et $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Soit $\text{proj}_W(\vec{v})$ la projection orthogonale de \vec{v} sur W . On dira que $\text{proj}_W(\vec{v})$ est la meilleure approximation de \vec{v} dans W :*

Théorème 6.33. *Soit W un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n et supposons que $W = \text{span}\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p\}$ où $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p\}$ est une famille orthonormale. Alors, pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ on a*

Définition 6.34 (matrice orthogonale).
Une matrice $n \times n$ inversible telle que

6.4 Gram-Schmidt

Par le théorème 6.30, on a

$$\text{proj}_W(\vec{v}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2} \vec{u}_2$$

Exemple 6.35.

Soient $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Théorème 6.36 (Algorithme de Gram-Schmidt). *Soient W un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n et $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$ une base de W . Alors on peut construire une base OG de W en suivant le procédé de Gram-Schmidt :*

Exemple 6.37.

$$\text{Soient } \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $W = \text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$.

Marche à suivre pour Gram-Schmidt

On a $W = \text{span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$.

- 1) on vérifie que $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$ est une base de W , sinon on enlève les vecteurs superflus et on choisit une base de W .
- 2) on regarde si $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = 0$ pour $i \neq j$
- 3) on fait l'algorithme de Gram-Schmidt.

6.5 Factorisation QR

Théorème 6.38. *Soit A une matrice $m \times n$ dont ses colonnes sont linéairement indépendantes. Alors il existe une factorisation $A = QR$ avec*

1.

2.

Exemple 6.39.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

6.6 Méthode des moindres carrés

But : On s'intéresse à des problèmes incompatibles $A\vec{x} = \vec{b}$. A est une matrice $m \times n$ singulière (A peut être carrée si $m = n$ ou non-carrée si $m \neq n$).

On cherche à approximer $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ en trouvant $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $A\vec{x} \approx \vec{b}$.

Exemple 6.40.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$



Définition 6.41 (solution au sens des moindres carrés).

Soient A une matrice $m \times n$ et $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$. On appelle *solution au sens des moindres carrés* de $A\vec{x} = \vec{b}$ le vecteur $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que