Preuve du Thm 448

Soit A une matrice $m \times n$, alors $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^T)$.

<u>Preuve</u>. Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ \underbrace{a_{m1}}_{\vec{a_1}} & \underbrace{a_{m2}}_{\vec{a_2}} & \cdots & \underbrace{a_{mn}}_{\vec{a_n}} \end{pmatrix}$ $m \times n$

et $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & & \\ \underbrace{a_{1n}}_{\vec{b_1}} & \underbrace{a_{2n}}_{\vec{b_2}} & \cdots & \underbrace{a_{mn}}_{\vec{b_m}} \end{pmatrix}$ $n \times m$

On a $\vec{a_1}, .., \vec{a_n} \in \mathbb{R}^m$ et $\vec{b_1}, .., \vec{b_m} \in \mathbb{R}^n$

On commence par montrer que $\text{rang}(A) \leq \text{rang}(A^T)$.

Soit $\mathcal{L} = \{\vec{l_1}, .., \vec{l_k}\}$ une base de $\text{Im}(A^T)$, $k \leq m$

<u>Rmq</u> : On a que $\text{rang}(A^T) = k$ et $k \leq m$
car $\text{rang}(A^T) = \dim \text{Im}(A^T)$ et que
$\text{Im}(A^T) = \text{span}\{\vec{b_1}, .., \vec{b_m}\}$ donc $k \leq m$
si $\{\vec{b_1}, .., \vec{b_m}\}$ est lin indep $k = m$, sinon
on élimine les vecteurs en plus de $\{\vec{b_1}, .., \vec{b_m}\}$

On a alors qu'il existe $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ $i = 1, .., m$, $j = 1, .., k$

tq
$$\vec{b_1} = \alpha_{11} \vec{l_1} + \alpha_{12} \vec{l_2} + \cdots + \alpha_{1k} \vec{l_k}$$
$$\vdots \qquad (*)$$
$$\vec{b_m} = \alpha_{m1} \vec{l_1} + \cdots + \alpha_{mk} \vec{l_k}$$

On a $A^T = (\vec{b_1} \cdots \vec{b_m})$ et $A = \begin{pmatrix} \vec{b_1}^T \\ \vdots \\ \vec{b_m}^T \end{pmatrix}$

En utilisant (*) on a

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \vec{l_1}^T + \alpha_{12} \vec{l_2}^T + \cdots + \alpha_{1k} \vec{l_k}^T \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \underbrace{\vec{l_1}^T}_{1\times n} + \cdots + \alpha_{mk} \underbrace{\vec{l_k}^T}_{1\times n} \end{pmatrix}$$

où $\vec{l_1}^T = (l_{11} \; l_{12} \; \cdots \; l_{1n})$ etc.

$$\vec{a_1} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} l_{11} + \alpha_{12} l_{21} + \cdots + \alpha_{1k} \overset{\in \mathbb{R}}{l_{k1}} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} l_{11} + \alpha_{m2} l_{21} + \cdots + \alpha_{mk} l_{k1} \end{pmatrix}$$

$$= l_{11} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^m} + l_{21} \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \vdots \\ \alpha_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + l_{k1} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_{1k} \\ \vdots \\ \alpha_{mk} \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^m}$$

donc $\vec{a_1}$ est comb. linéaire de k vecteurs de $\mathbb{R}^m$

De même pour $\vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n}$

Donc $Im(A) = span\Big\{ \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \alpha_{1k} \\ \vdots \\ \alpha_{mk} \end{pmatrix}}_{k \text{ vecteurs (pas forcément une base)}} \Big\}$

Ainsi $rang(A) \leq k = rang(A^T)$

car les k vecteurs ne sont pas forcément lin indép.

On procède de la même manière avec une base de $Im(A)$. On obtient $rang(A^T) \leq rang(A)$

Ainsi $rang(A) = rang(A^T)$

#