Théorie A $m \times n$

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{span}\{\vec{a_1}, \dots, \vec{a_n}\} \subseteq \mathbb{R}^m$$

$$\mathrm{Lgn}(A) = \mathrm{span}\{\mathrm{Lgn}_1(A)^T, \dots, \mathrm{Lgn}_m(A)^T\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

et $\mathrm{Lgn}(A) = \mathrm{Im}(A^T)$ ← par définition.

Théorème

si $A \sim \dots \sim B$ alors

$$\mathrm{Lgn}(A) = \mathrm{Lgn}(B)$$

Exercice additionnel

$$\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}2\\-3\\-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\4\\2\\0\end{pmatrix}\right\} = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Soit $A = \begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ -3 & -1 & 4\\ -2 & 3 & 2\\ 0 & 4 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix}2 & -3 & -2 & 0\\ 1 & -1 & 3 & 4\\ -2 & 4 & 2 & 0\end{pmatrix}$

On échelonne A^T:

$$\begin{pmatrix}2 & -3 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 8 & 8\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix} = B$$

Alors $\mathrm{Lgn}(A^T) = \mathrm{Lgn}(B)$ et donc

$$\mathrm{Im}(A) \underset{\text{déf}}{=} \mathrm{Lgn}(A^T) \underset{\text{thm 45 + échelonnage}}{=} \mathrm{Lgn}(B) \underset{\text{déf.}}{=} \mathrm{Im}(B^T)$$

Donc c'est VRAI.

forme éch réduite de A

Question : on a dit $\mathrm{Im}(A) \neq \mathrm{Im}(A_{ER})$

⚠ des fois c'est vrai mais en général non.

Alors n'y a-t-il pas un souci avec

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Lgn}(A^T) = \mathrm{Lgn}(B) = \mathrm{Im}(B^T) \; ?$$

Non car $B^T \neq A_{ER}$. (en général ..)

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \cdot \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = B$$

forme éch réduite de A^T

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_{ER}$$

On a bien que $A_{ER} \neq B^T$. et $\mathrm{Im}(A) \neq \mathrm{Im}(A_{ER})$
mais $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(B^T)$.