Série 7 (Corrigé)

Cette série suit les chapitres 3, 4 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay.

Mots-clés : *déterminant, espaces vectoriel, sous espace vectoriel*

Remarques :

1. il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours ;
2. il peut arriver que certaines questions soient reliées au cours du jeudi.

Definition 1.1 On définit l'ensemble des matrices de tailles $m \times n$ à coefficients (composantes) dans $\mathbb{R}$ par $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Exercice 1

Montrez que les colonnes d'une matrice A inversible de taille $n \times n$.

a) engendrent $\mathbb{R}^n$;
b) sont linéairement indépendantes.

Sol.:

a) Par définition, A est inversible s'il existe une matrice notée A^{-1} (de taille $n \times n$) telle que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

   Les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^n$ si et seulement si, pour tout $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^n$ (arbitraire), le système linéaire $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ possède une solution. En prenant $\overrightarrow{x} = A^{-1}\overrightarrow{b}$ on obtient $A\overrightarrow{x} = AA^{-1}\overrightarrow{b} = I_n\overrightarrow{b} = \overrightarrow{b}$.

b) Les colonnes de A sont linéairement indépendantes si et seulement si le système linéaire $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ n'admet que la solution triviale, ce qui est satisfait car toute solution de $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ vérifie $\overrightarrow{x} = I_n\overrightarrow{x} = A^{-1}A\overrightarrow{x} = A^{-1}\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.

Exercice 2

Calculer les produits suivants en utilisant la multiplication par bloc :

a)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ \hline 0 & 1 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 \end{array}\right)$$

b)

$$\left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$$

c)

$$\left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{array}\right)$$

Sol.:

a)

$$\text{On a} \quad \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} B_1 \\ \hline B_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} A_1B_1 + A_2B_2 \\ \hline A_3B_1 + A_4B_2 \end{array}\right), \quad \text{donc} \quad \left(\begin{array}{cc} 3 & 4 \\ 5 & 4 \\ \hline 1 & 2 \end{array}\right).$$

b)

$$\text{On a} \quad \left(\begin{array}{c|c|c} A_1 & A_2 & A_3 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} B_1 \\ \hline B_2 \\ \hline B_3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 \end{array}\right), \quad \text{donc} \quad \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

c)

$$\text{On a} \quad \left(\begin{array}{c} A_1 \\ \hline A_2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A_1B_1 & A_1B_2 \\ \hline A_2B_1 & A_2B_2 \end{array}\right), \quad \text{donc} \quad \left(\begin{array}{c|c} 3 & 6 \\ \hline 4 & 8 \end{array}\right).$$

Exercice 3

Soient A_{11} et A_{22} des matrices carrées.

a) On suppose que A_{11} est inversible. Déterminer X, Y et S satisfaisant

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ X & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & Y \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

où le produit matriciel de droite est compatible avec la multiplication par bloc.

b) On suppose que A_{11} et A sont inversibles. Montrer que S est inversible.

Remarque : La matrice S est appelée le *complément de Schur*.

Sol.:

a) Admettons que A_{11} est une matrice de taille $n \times n$ et A_{22} de taille $m \times m$. Donc, la matrice A est de taille $(m+n) \times (m+n)$, A_{21} de taille $m \times n$ et A_{12} de taille $n \times m$. On calcule que

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ X & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & Y \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ X & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{11}Y \\ 0 & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{11}Y \\ XA_{11} & XA_{11}Y + S \end{pmatrix}.$$

Successivement, on peut déduire que Y est de taille $n \times m$, X de taille $m \times n$ et S de taille $m \times m$. De plus, on remarque que

$$Y = A_{11}^{-1}A_{12}, \qquad X = A_{21}A_{11}^{-1}, \qquad S = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}.$$

b) D'abord, comme A_{11} est inversible, la décomposition de la partie a) est bien définie. En utilisant, l'exercice précédent on obtient

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -X & I \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} I & -Y \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix},$$

où la partie gauche de l'équation est un produit de matrices inversibles, donc la partie droite de l'équation est également inversible. Par la théorie vu en classe lors du calcul de l'inverse d'une matrice tiangulaire supérieure par bloc, il faut que la matrice S soit inversible.

Exercice 4

a) On se donne

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & k \end{pmatrix}.$$

Pour quelle(s) valeur(s) de k a-t-on $AB = BA$?

b) Soit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et } T = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que $MN = MT$, bien que N soit différent de T.

Sol.:

1. On a $AB = BA$ pour $k = 9$ seulement. On voit que c'est une condition nécessaire en calculant les coefficients $(1, 2)$ des deux matrices. On trouve respectivement $12 - 4k$ et -24. On s'assure ensuite que les autres coefficients sont égaux pour ce choix de k.
2. On calcule les deux produits matriciels MN et NT. On trouve dans les deux cas $\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 21 & -6 \end{pmatrix}$.

   Ceci donne un nouvel exemple de l'impossibilité de simplifier un produit matriciel en "divisant par M", le problème étant bien sûr qu'on ne peut pas diviser par une matrice (en général).

Exercice 5

Soit $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ l'application définie par $T(A) = A + A^T$.

1. Déterminer si T est linéaire.
2. Déterminer si T est surjective.
3. Déterminer si T est injective.
4. Déterminer l'ensemble W des matrices qui vérifient $T(A) = 0$ et démontrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Sol.:

1. Pour que T soit linéaire nous devons vérifier que T se comporte bien par rapport à la somme et à l'action. Or, puisque $(A + B)^T = A^T + B^T$ et $(\alpha A)^T = \alpha A^T$, on calcule facilement en utilisant l'associativité d'abord puis la commutativité de la somme de matrices que

   $$T(A + B) = (A + B) + (A + B)^T = A + B + A^T + B^T = A + A^T + B + B^T = TA + TB$$

   De même $T(\alpha A) = \alpha A^T = \alpha TA$.

2. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors T est donnée explicitement par la formule $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & b+c \\ b+c & 2d \end{pmatrix}$.
   On voit ici que les coefficients $(1,2)$ et $(2,1)$ sont les mêmes si bien que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ne peut pas être de la forme TA. L'application T n'est pas surjective.
3. T n'est pas injective non plus puisqu'il existe des matrices non nulles qui sont envoyées sur la matrice nulle par T, par exemple $T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
4. Pour trouver W on doit trouver toutes les matrices A dont les coefficients vérifient les équations $2a = 0, 2d = 0, b + c = 0$. On trouve donc

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Exercice 6

1. Déterminer les matrices élémentaires 3×3 suivantes :
   - E_1, qui permute les deuxièmes et troisièmes lignes ;
   - E_2, qui multiplie la deuxième ligne par 8 ;
   - E_3, qui ajoute 7 fois la première ligne à la troisième.
2. Les matrices E_1, E_2 et E_3 sont elles inversibles ? Pourquoi ? Si oui, donner leur inverse et l'inverse du produit $E_1\, E_2\, E_3$.
3. Calculer le déterminant des matrices élémentaires suivantes.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   A quelle opération élémentaire chacune de ces matrices se rapporte-t-elle ?

Sol.:

1. On a

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. . Chaque matrice est inversible car chaque opération élémentaire possède son propre inverse :

$$E_1 = E_1^{-1}, \quad E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Donc

$$(E_1E_2E_3)^{-1} = E_3^{-1}E_2^{-1}E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 \\ -7 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. - $\det E_1 = 1$. Multiplier à gauche par cette matrice correspond à ajouter k fois la deuxième ligne à la troisième.

- $\det E_2 = k$. Cette matrice multiplie la deuxième ligne par k.
- $\det E_3 = -1$. Cette matrice permute les deux premières lignes.
- $\det E_4 = -1$. Cette matrice permute la première et la troisième ligne.

Exercice 7

Montrer qu'une matrice X (2×2) qui commute avec toutes les matrices A (2×2) est un multiple de l'identité, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $X = \lambda I_n$.

Indication : Poser $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, puis utiliser quelques matrices A bien choisies.

Sol.: Posons $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Comme X doit commuter avec toute matrice 2×2, on doit par exemple avoir

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

qui est équivalent à

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De là on conclut que $b = c = 0$, et donc notre matrice est de la forme

$$X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

Ensuite, on recommence

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

qui implique $a = d$. Donc

$$X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = aI_n\,.$$

Exercice 8

Calculer les déterminants des quatre matrices suivantes (en utilisant les propriétés du déterminant et sans faire trop de calculs !)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Sol.: On calcule en commençant à échelonner la matrice $\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = -9$.

La matrice B est obtenue à partir de A en multipliant la première ligne par 2, son déterminant vaut donc le double, -18.

La matrice C est obtenue de A en échangeant les lignes 1 et 2, son déterminant vaut donc 9.

Enfin la matrice D est obtenue de A en ajoutant la ligne 2 à la ligne 1, son déterminant est donc le même, -9.

Exercice 9

On considère des nombres $a, b, c \in \mathbb{R}$ et on construit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$$

Montrer que $\det A = (b-a)(c-a)(c-b)$. Pour quelles valeurs de a, b, c la matrice A est-elle inversible ?

Indication. Effectuer des opérations sur les lignes de la matrice en utilisant L_2 pour modifier L_3, puis L_1 pour modifier L_2. La même astuce sera utile dans la suite de l'exercice !

Trouver une formule pour le déterminant de la matrice de la matrice 4×4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{pmatrix}$$

Sol.: Pour calculer le déterminant de la matrice A on peut astucieusement effectuer les opérations élémentaires suivantes dans l'ordre indiqué : On soustrait a fois la 2ème ligne à la 3ème et ensuite a fois la première ligne à la deuxième :

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-ba & c^2-ca \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b(b-a) & c(c-a) \end{vmatrix}$$

Nous avons développé le déterminant selon la première colonne. On peut maintenant mettre $(b-a)$ en évidence par linéarité du déterminant comme fonction de la première colonne et $(c-a)$ par linéarité du déterminant comme fonction de la troisième colonne :

$$\det A = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & c \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

Pour que la matrice A soit inversible il faut que le déterminant soit non nul, donc que les nombres a, b, c soient tous distincts.

Les opérations élémentaires $L_4 - aL_3$, puis $L_3 - aL_2$, puis $L_2 - aL_1$ ramènent le calcul à un déterminant de Vandermonde de taille 3×3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) & d(d-a) \\ 0 & b^2(b-a) & c^2(c-a) & d^2(d-a) \end{pmatrix}$$

Ainsi le déterminant vaut $(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$.

Exercice 10

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

a) Si A et B sont deux matrices de taille 2×2 dont les colonnes sont désignées par $\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2$ et $\overrightarrow{b}_1, \overrightarrow{b}_2$, alors $AB = \begin{pmatrix} \overrightarrow{a}_1 \cdot \overrightarrow{b}_1 & \overrightarrow{a}_2 \cdot \overrightarrow{b}_2 \end{pmatrix}$. ☐ ☐

b) Soient A, B et C trois matrices de taille 3×3. Alors $AB + AC = (B+C)A$. ☐ ☐

c) Soient A et B deux matrices de taille $n \times n$. Alors $A^T + B^T = (A+B)^T$. ☐ ☐

d) La transposée d'un produit de matrices est égale au produit de leurs transposées dans le même ordre. ☐ ☐

Sol.:

a) Faux. D'après les règles du calcul matriciel, le produit de deux matrices 2×2 est encore une matrice 2×2 or ici $\begin{pmatrix} \overrightarrow{a}_1 \cdot \overrightarrow{b}_1 & \overrightarrow{a}_2 \cdot \overrightarrow{b}_2 \end{pmatrix}$ est une matrice ligne (de taille 1×2).

b) Faux. La bonne formule est $AB + AC = A(B+C)$.

c) Vrai. Plus généralement, si A et B sont deux matrices de taille $n \times n$, alors $A^T + B^T = (A+B)^T$. En effet, le coefficient (i,j) de la matrice $(A+B)^T$ est égal au coefficient (j,i) de la matrice $A+B$ qui est $a_{ji} + b_{ji}$ et qui est aussi égal au coefficient (i,j) de la matrice $A^T + B^T$.

d) Faux. La formule correcte est $(AB)^T = B^T A^T$ vue à l'exercice **??**.

On peut trouver facilement un contre-exemple à l'assertion proposée avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On calcule et on trouve $(AB)^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ tandis que nous avons $A^T B^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 11

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

a) Soient A, B et C trois matrices. Alors $(AB)C = (AC)B$. ☐ ☐

b) Si A est une matrice inversible, alors A^{-1} l'est aussi. ☐ ☐

c) Le produit de plusieurs matrices inversibles de taille $n \times n$ n'est pas inversible. ☐ ☐

d) Si A est une matrice inversible de taille $n \times n$, alors l'équation $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ est compatible quel que soit $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^n$. ☐ ☐

Sol.:

a) Faux. Prenons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = C$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ Alors on a

$(AB)C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, tandis que

$(AC)B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

b) Vrai. Soit A une matrice inversible de taille $n \times n$, alors il existe une matrice, notée A^{-1}, telle que $AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$. Ces équations, lues de droite à gauche, disent que la matrice A^{-1} est aussi inversible et que son inverse vaut A, ainsi $(A^{-1})^{-1} = A$.

c) Faux. Si A et B sont inversibles, d'inverses respectifs A^{-1} et B^{-1}, alors le produit AB est inversible et son inverse vaut $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. En effet $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I_n = (B^{-1}A^{-1})(AB)$. Donc le produit de plusieurs matrices inversibles de taille $n \times n$ est toujours inversible.

d) Vrai. Soit A une matrice inversible de taille $n \times n$ et $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^n$ alors l'équation $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ admet une (unique) solution qui est $\overrightarrow{x} = A^{-1}\overrightarrow{b}$.

Exercice 12

a) Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

b) Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} a & b & a \\ b & a & b \\ a+b & a+b & a+b \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ a & a+b & c \\ a & b & a \end{vmatrix}.$$

c) Calculer le déterminant de la matrice suivante. Comment le déterminant dépend t-il de l'angle φ ? Pourquoi ?

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

d) Soient $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 18 & 17 & 23 \\ 49 & 1 & 72 & 10 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 18 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 18 \end{pmatrix}$. Calculer $\det(AB)$.

Sol.:

a) 11. Il est plus simple de développer par rapport à la deuxième ligne.

b) Premier déterminant : 0 car la troisième ligne est la somme des deux premières. Second déterminant : a^3.

c) $\det A = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ est indépendant de l'angle φ. Toutes les matrices de rotation vérifient la propriété $\det A = 1$.

d) $\det B = 0$, donc $\det(AB) = \det A \cdot \det B = 0$.

Exercice 13

Calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sol.: On échelonne la matrice afin de rendre les calculs plus simples. On obtient $\det(A) = 16$. En effet en utilisant L_1 pour échelonner L_2 et L_3 et L_3 pour $L4$ et L_5 (ça fera apparaître le plus rapidement possible des 0)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \dots \underset{\sim}{\text{opérations de type 3}} \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Puis en utilisant L_2

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\text{opérations de type 3}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \underset{\sim}{L_5 \leftarrow L_5 - L4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

En permutant L_2 et L_3 on obtient une matrice triangulaire supérieure, que l'on appelle A'

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Le calcul de $det(A)$ sera impacté par la permutation de la manière suivante

$$det(A) = (-1)det(A') = (-1)(1 \cdot (-2) \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = (-1)(-16) = 16$$

<u>Exercices additionnels</u>

Exercice 14

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

a) Un système d'équations linéaires avec trois équations à 5 inconnues admet au moins une solution. ☐ ☐

b) Un système d'équations linéaires avec cinq équations à 3 inconnues n'admet aucune solution. ☐ ☐
c) L'équation $\sqrt{2}x + \pi y - z = 1$ est une équation linéaire à trois inconnues. ☐ ☐
d) L'équation $2\sqrt{x} + \pi y - z = 1$ est une équation linéaire à trois inconnues. ☐ ☐
e) L'équation $\cos x = 0$ est une équation linéaire à une inconnue. ☐ ☐
f) L'équation $x = 1$ est une équation linéaire à une inconnue, les équations $y = -1$ et $z = 5$ également, mais le système d'équations

$$\begin{cases} x & = 1 \\ y & = -1 \\ z & = 5 \end{cases}$$

est un système linéaire de trois équations à trois inconnues. ☐ ☐

Sol.:

a) C'est faux. Considérons par exemple les trois équations $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$, $x_1 = 0$ et $x_1 = 1$. Le système formé de ces trois équations à 5 inconnues n'a visiblement aucune solution.
b) C'est également faux. Considérons par exemple le système

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ x + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

Ce système *homogène* admet la solution nulle $x = y = z = 0$.
c) C'est vrai.
d) C'est faux. La présence de la racine carrée d'une inconnue n'est pas autorisée dans une équation linéaire.
e) C'est faux. La présence du cosinus d'une inconnue n'est pas autorisée.
f) C'est vrai. Ce qu'illustre cet exemple c'est qu'il n'est pas nécessaire que chaque inconnue apparaisse dans chaque équation du système.

Exercice 15

Soit R la matrice échelonnée-réduite associée à la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 & 8 \\ -1 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Nous avons

☐ $r_{14} = 6$ ☐ $r_{14} = 5$ ☐ $r_{14} = 3$ ☐ $r_{14} = 2$

Sol.: $r_{14} = 5$

Exercice 16

Considérer les vecteurs

$$\overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v}_3 = \begin{pmatrix} h+7 \\ 8 \\ 2h+1 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur $\overrightarrow{v}_3$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{v}_1$ et $\overrightarrow{v}_2$ lorsque

☐ $h = 2$ ☐ $h = 4$ ☐ $h = 1$ ☐ $h = -2$

Sol.: $h = 4$