

Série 6 (Corrigé)

Cette série suit le chapitre 2 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay.

Mots-clés : *matrice, déterminant, inverse*

Remarques :

1. il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours ;
2. il peut arriver que certaines questions soient reliées au cours du jeudi.

Exercice 1

- a) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Est-ce que $AB = BA$?
- b) Même question pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Sol.:

- a) Oui. $AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Remarque : A est la matrice identité, elle commute avec n'importe quelle matrice.
- b) Non. $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

- a) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Trouver (si elle existe) une matrice B de taille 2×2 non nulle telle que $AB = 0$. (*Idée : écrire AB sous la forme $(A \vec{b}_1 \quad A \vec{b}_2)$*)
- b) Même question pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.
- c) Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & k \end{pmatrix}$. Pour quelle(s) valeur(s) de $k \in \mathbb{R}$ a-t-on $AB = BA$?
- d) Trouver une matrice A non nulle telle que $A^2 = 0$.

Sol.:

- a) On note \vec{b}_1 et \vec{b}_2 les colonnes de $B : B = (\vec{b}_1 \ \vec{b}_2)$. On a $AB = (A\vec{b}_1 \ A\vec{b}_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, on doit chercher un vecteur non nul \vec{b}_1 tel que $A\vec{b}_1 = \vec{0}$. Si un tel vecteur existe, on peut poser par exemple $B = (\vec{b}_1 \ \vec{b}_2)$ avec $\vec{b}_2 = \vec{0}$. Sinon, une telle matrice B n'existe pas.

Soit $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Le système $A\vec{b}_1 = \vec{0}$ est linéaire en x_1 et x_2 avec pour matrice augmentée $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$, dont la forme échelonnée réduite est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, la solution générale est $x_1 = -2x_2$, c'est-à-dire, sous forme vectorielle $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} x_2$. Ainsi, (en fixant $x_2 = 1$) on trouve un vecteur $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ tel que $A\vec{b}_1 = \vec{0}$. On peut donc proposer la matrice $B = (\vec{b}_1 \ \vec{b}_2) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- b) En résolvant $A\vec{b}_1 = \vec{0}$ pour $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ on obtient un système linéaire avec pour matrice augmentée $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. La forme échelonnée réduite est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Par conséquent, le système a une unique solution triviale $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et la matrice B telle que $AB = 0$ n'existe pas.

- c) On calcule $AB = \begin{pmatrix} 1 & 12-4k \\ -30 & -20+k \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 1 & -24 \\ 15-5k & -20+k \end{pmatrix}$. L'équation $AB = BA$ équivaut donc au système

$$\begin{cases} 12-4k = -24 \\ -30 = 15-5k, \end{cases}$$

avec pour unique solution $k = 9$.

- d) Par exemple, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

Calculer les produits matriciels suivants, et indiquer les compositions correspondantes de transformations linéaires, avec les dimensions des espaces, $T_{AB} : \mathbb{R}^{\dots} \xrightarrow{T_{..}} \mathbb{R}^{\dots} \xrightarrow{T_{..}} \mathbb{R}^{\dots}$.

a) AB , où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

b) ABC , où $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

c) ABC , où $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Sol.:

a) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $T_{AB} : \mathbb{R}^3 \xrightarrow{T_B} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{T_A} \mathbb{R}^3$.

b) $ABC = \begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}$, $\vec{T}_{ABC} : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{T_C} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{T_B} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{T_A} \mathbb{R}^2$.

c) $ABC = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $T_{ABC} : \mathbb{R}^3 \xrightarrow{T_C} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{T_B} \mathbb{R} \xrightarrow{T_A} \mathbb{R}^3$.

Exercice 4

a) Calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

(i) en utilisant la formule générale de l'inverse d'une matrice 2×2 ;

(ii) en mettant la matrice $(A \ I_2)$ sous forme échelonnée réduite.

b) Calculer l'inverse de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ en mettant la matrice $(B \ I_3)$ sous forme échelonnée réduite.

Sol.:

a) Pour la matrice A .

(i) $\det(A) = 2 \times 4 - 2 \times 2 = 4$. Ainsi, $A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

(ii)

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right) \\ &\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Ainsi, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

b) Pour la matrice B .

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 8 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 10 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 & 3/2 & 1/2 \end{array} \right).$$

Ainsi, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 10 & 4 & 1 \\ 7/2 & 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Exercice 5

Démontrer ce théorème.

Soit A une matrice $n \times n$. Alors s'il existe une matrice C de taille $n \times n$ telle que $AC = I_n$ ou $CA = I_n$ alors A est inversible d'inverse C .

Sol.: Soit $A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$.

Preuve 1 :

- On montre que $AC = I_n \Rightarrow \text{span}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\} = \mathbb{R}^n$. Soit $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, on a

$$AC\vec{x} = I_n\vec{x}.$$

Or $C\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, pour tous $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Donc pour chaque $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$, il existe $C\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$A(C\vec{b}) = \vec{b}.$$

Les colonnes de A engendrent donc \mathbb{R}^n et par le théorème de caractérisation des matrices inversibles (paragraphe 2.2), la matrice A est inversible. On a alors $AC = CA = I_n$.

- On montre que $CA = I_n \Rightarrow$ les colonnes de A sont linéairement indépendantes ou $A\vec{x} = \vec{0}$ n'admet que la solution triviale. Soit $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $A\vec{x} = \vec{0}$. On sait que $\vec{0}$ est un vecteur qui vérifie cette équation, et on veut montrer que c'est le seul. On a

$$CA\vec{x} = C\vec{0} = \vec{0}$$

et $CA = I_n$. Ainsi

$$CA\vec{x} = I_n\vec{x} \text{ et } CA\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow I_n\vec{x} = \vec{0}.$$

Or comme I_n est inversible, $\vec{x} = \vec{0}$ est la seule solution de $A\vec{x} = \vec{0}$. Par le théorème de caractérisation des matrices inversibles (paragraphe 2.2), la matrice A est inversible. On a alors $AC = CA = I_n$.

Preuve 2 : sans utiliser le théorème de la caractérisation des matrices inversibles (paragraphe 2.2). Mais en montrant que $AC = I_n$ implique $CA = I_n$.

1. On montre que $AC = I_n$ implique que les colonnes de C engendrent \mathbb{R}^n . Soit $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $C\vec{x} = \vec{0}$. Alors $AC\vec{x} = I_n\vec{x}$ et $AC\vec{x} = \vec{0}$ implique que $\vec{0} = I_n\vec{x}$ et $\vec{x} = \vec{0}$. On a donc que $C\vec{x} = \vec{0}$ n'admet que la solution triviale. Les colonnes de C sont donc linéairement indépendantes et C possède n pivots (un pivot par ligne). Or comme C est une matrice de taille $n \times n$, il y'a aussi un pivot par colonne. Donc les colonnes de C engendrent \mathbb{R}^n .
2. Ainsi pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$, il existe $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $C\vec{x} = \vec{b}$.

Alors

$$CA\vec{b} = CA(C\vec{x}) = C(AC\vec{x}) = C\vec{x} = \vec{b}.$$

Or c'est vrai pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$, donc c'est vrai pour les vecteurs de la base canonique, i.e. pour les $\vec{e}_i, i = 1, \dots, n$. On a alors

$$CA\vec{e}_i = \vec{e}_i, i = 1, \dots, n.$$

Ceci implique que $CA = I_n$. On a obtenu que $AC = I_n$ implique $CA = I_n$ et donc, par la définition de l'inverse, que la matrice A est inversible.

La preuve $CA = I_n$ implique $AC = I_n$ est similaire.

Exercice 6

Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles (essayer d'utiliser le moins de calculs possible, justifier votre réponse).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 7 & 14 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -6 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 8 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -7 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 18 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 17 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Sol.:

- A) Comme la colonne 1 est un multiple de la colonne 2, les colonnes sont linéairement dépendantes, et donc la matrice A n'est pas inversible.
- B) Après plusieurs opérations de réduction sur les lignes, on obtient une forme échelonnée (non réduite)

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

On trouve un pivot dans chaque ligne et la matrice est carrée, donc elle est inversible.

- C) C est inversible car sous forme échelonnée (non réduite) avec pivot dans chaque ligne et la matrice est carrée.
- D) D^T est sous forme échelonnée, avec un pivot dans chaque ligne et de taille carrée, donc D^T est inversible. Par conséquent, D est également inversible.
- E) La matrice E n'est pas carrée, donc non inversible.

Exercice 7

On considère les matrices élémentaires de taille 4×4 .

- a) Donner la matrice élémentaire qui permet de permuter les lignes 2 et 4.
- b) Donner la matrice élémentaire qui ajoute cinq fois la ligne 1 à la ligne 3.
- c) Donner la matrice élémentaire qui multiplie la ligne 3 par 17.
- d) Donner les inverses des matrices trouvées aux questions a), b) et c).

Sol.:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b) } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{c) } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

d) Pour inverser la transformation associée à A , on considère la même transformation qui

permuté les lignes 2 et 4, ainsi $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Pour inverser la transformation associée à B , on considère la transformation qui soustrait

cinq fois la ligne 1 à la ligne 3, ainsi $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Pour inverser la transformation associée à C , on considère la transformation qui divise la

ligne 3 par 17, ainsi $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Exercice 8

Soit A une matrice de taille $m \times n$ et soit l'application linéaire $T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ donnée par $T_A(\vec{x}) = A\vec{x}$. Montrer

a) T_A est injective $\Leftrightarrow A$ a une position pivot dans chaque colonne.

b) T_A est surjective $\Leftrightarrow A$ a une position pivot dans chaque ligne.

Préciser dans chaque cas quelle est la condition nécessaire entre m et n .

Sol.:

(a) T_A injective $\Leftrightarrow T_A(\vec{x}) = \vec{0}$ n'admet que la solution triviale
 $\Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{0}$ n'admet que la solution triviale
 $\Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{0}$ n'a pas de variable libre
 $\Leftrightarrow A$ a une position pivot dans chaque colonne.

(b) T_A surjective $\Leftrightarrow T_A(\vec{x}) = \vec{b}$ a une solution pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$
 $\Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{b}$ a une solution pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$
 $\Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{b}$ est compatible pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$
 $\Leftrightarrow A$ a une position pivot dans chaque ligne.

Pour répondre à la deuxième question, nous observons que pour la matrice A on a

$$\text{nombre de positions pivot} \leq \min\{m, n\},$$

comme le nombre maximal de positions pivot est atteint si chaque élément diagonal a_{ii} de la matrice A (de taille $m \times n$) est une position pivot. Alors,

- (a) on a déduit que T_A est injective si et seulement si A a n positions pivot. Donc, il est nécessaire que $n \leq m$.
- (b) on a déduit que T_A est surjective si et seulement si A a m positions pivot. Donc, il est nécessaire que $m \leq n$.

On retrouve au passage que nécessairement $n = m$ lorsque T_A est bijective.

Exercice 9

Ceci est un autre exercice de base concernant les produits matriciels, pour nous assurer que la différence entre $\vec{u}^T \vec{v}$ et $\vec{u} \vec{v}^T$ est bien claire.

On peut considérer tout vecteur de \mathbb{R}^n comme une matrice de dimension $n \times 1$. Soient les vecteurs \vec{u} et \vec{v} de \mathbb{R}^3 :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

On appelle $\vec{u}^T \vec{v}$ produit scalaire (ou produit intérieur) des vecteurs \vec{u} et \vec{v} .

- a) Ecrire \vec{u}^T et \vec{v}^T .
- b) Quelle est la taille des deux matrices produits $\vec{u}^T \vec{v}$ et $\vec{v}^T \vec{u}$?
- c) Ces deux produits sont-ils égaux ? Pourquoi ?

Le produit $\vec{u} \vec{v}^T$ est appelé produit extérieur.

- d) Quelle est la taille des deux matrices produits $\vec{u} \vec{v}^T$ et $\vec{v} \vec{u}^T$?
- e) Ces deux produits sont-ils égaux ? Pourquoi ?

Sol.:

- a) $\vec{u}^T = (a \ b \ c)$ et $\vec{v}^T = (1 \ 2 \ 3)$.
- b) La matrice \vec{u}^T est une matrice 1×3 et la matrice \vec{v} est une matrice 3×1 . La taille du produit $\vec{u}^T \vec{v}$ est donc 1×1 . Même chose pour la taille du produit $\vec{v}^T \vec{u}$.
- c) Ces deux produits sont transposés l'un de l'autre, comme ils sont de taille 1×1 , ils sont égaux.
- d) La matrice \vec{u} est une matrice 3×1 et la matrice \vec{v}^T est une matrice 1×3 . La dimension du produit $\vec{u} \vec{v}^T$ est donc 3×3 . Même chose pour la dimension du produit $\vec{v} \vec{u}^T$.
- e) Non. Les produits sont transposés l'un de l'autre, mais ici on a des matrices 3×3 . En général une matrice n'est pas égale à sa transposée. Pour le démontrer, le plus simple est de donner un contre-exemple concret. On peut choisir par exemple $a = 1, b = c = 0$. Les deux matrices 3×3 sont alors distinctes.

Exercice 10

Soit

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer C^2 et montrer que C^3 est la matrice nulle. On dit que C est *nilpotente*.

2. Montrer sans faire de calculs explicites que $I_3 + C + C^2$ est l'inverse de la matrice $(I_3 - C)$.
3. Trouver l'inverse (explícite cette fois!) de la matrice $I - C$.
4. Soit $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Trouver les solutions de l'équation $\vec{x} = C\vec{x} + \vec{b}$ en échelonnant la matrice augmentée $(I - C \mid \vec{b})$.
5. Résoudre la même équation que ci-dessus en utilisant la formule $\vec{x} = (I - C)^{-1}\vec{b}$.

Sol.:

1. On calcule $C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et alors $C^3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice nulle.

On dit que C est *nilpotente* lorsqu'une puissance de C est nulle.

2. Il suffit de calculer le produit en utilisant la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition :

$$(I_3 + C + C^2)(I_3 - C) = I_3 \cdot I_3 + C \cdot I_3 + C^2 \cdot I_3 - I_3 \cdot C - C \cdot C - C^2 \cdot C = I_3 + C + C^2 - C - C^2 - C^3$$

Par commutativité de l'addition matricielle on trouve donc $I_3 - C^3 = I_3$ puisque $C^3 = 0$. Ainsi $I_3 + C + C^2$ est l'inverse de la matrice $(I_3 - C)$.

3. Le calcul ci-dessus montre que

$$(I - C)^{-1} = I_3 + C + C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 19 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. L'échelonnage de la matrice augmentée donne la solution $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5. La formule $\vec{x} = (I - C)^{-1} \cdot \vec{b}$ donne la solution $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Exercice 11

Déterminer l'ensemble des valeurs du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ pour les quelles les matrices suivantes sont inversibles. Ensuite, donner l'inverse de la matrice considérée pour ces valeurs de λ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \lambda \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & \lambda \\ 3 & 2 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

Sol.: Après plusieurs opérations élémentaires, on a transformé la paire $(A \mid I_3)$ en

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -2 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

La matrice à gauche est ligne-équivalente à la matrice identité I_3 si et seulement si $\lambda \neq 0$. Donc A est inversible si et seulement si $\lambda \neq 0$, et dans ce cas son inverse est donné par

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2/\lambda & 1/\lambda & 1/\lambda \end{pmatrix}$$

Pour la seconde, on procède de même, et on montre que B est inversible si et seulement si $\lambda \neq 1/2$, et que dans ce cas

$$B^{-1} = \frac{1}{5(1-2\lambda)} \begin{pmatrix} 5-7\lambda & 1-\lambda & -\lambda \\ 3\lambda & 1-\lambda & -\lambda \\ -15 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 12

a) Les matrices sont de taille $n \times n$.

- Soient A, B deux matrices telles que A ou B n'est pas inversible. Alors AB n'est pas inversible.
- Il existe une matrice A inversible et une matrice B qui ne l'est pas telles que AB est inversible.
- Soient A, B deux matrices inversibles, alors $A + B$ est inversible.
- Soient A, B deux matrices inversibles, alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

b) Soit A une matrice $m \times n$ et B une matrice $n \times p$.

- Alors $(AB)^T = A^T B^T$.
- Alors $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ si A est inversible.
- Si $m = n$ et $A = A^T$, alors A est diagonale.
- Si $m = n = p$, $A = A^T$ et $B = B^T$, alors $(AB)^T = AB$.

c) Une matrice C de taille 2×2 vérifie $AC = CA$ pour toute matrice A de taille 2×2 si et seulement C est diagonale.

Une matrice C de taille 2×2 vérifie $AC = CA$ pour toute matrice A de taille 2×2 si et seulement C est scalaire, i.e. $C = \lambda I$, où I est la matrice identité et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Soient A, C deux matrices 2×2 telles que $AC = CA$. Alors A est diagonale ou C est diagonale.

Soient A, C deux matrices 2×2 telles que $AC = CA$. Alors A est scalaire ou C est scalaire.

d) Soit A une matrice de taille 7×8 et T l'application linéaire définie par $T\vec{x} = A \cdot \vec{x}$. Alors \vec{x} est un vecteur de

- \mathbb{R}^7
- \mathbb{R}^8

\mathbb{R}^{15}

\mathbb{R}^{56}

e) Soit A une matrice $m \times n$ et B une matrice $n \times p$.

Alors BA est une matrice $n \times n$.

Alors A^T est une matrice $m \times n$.

Alors A représente une application linéaire $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Alors $(AB)^T$ est une matrice $p \times m$.

f) Soient A, B, C trois matrices $n \times n$.

Si $AC = BC$, alors $A = B$.

Si A est inversible et $AC = BC$, alors $A = B$.

Si $C = C^{-1}$ et $AC = BC$, alors $A = B$.

Si $C = C^T$ et $AC = BC$, alors $A = B$.

g) Soit A une matrice carrée et a un nombre réel. Alors

$A + I$ est inversible.

$(A - I)(A + I) = A^2 - I$.

$(A + I)(A + I) = A^2 + I$.

$(aA)^2 = a(A^2)$.

Sol.:

a) Le point 1 est vrai. En effet, si AB est inversible, alors l'application linéaire représentée par AB est bijective. On en déduit que B est injective et A est surjective, donc A, B sont bijectives, donc inversibles, vu que ce sont des matrices carrées. Ainsi, si A ou B n'est pas inversible, AB n'est pas inversible. Ce raisonnement montre également que le point 2 est faux. Pour voir que le point 3 est faux, prendre $A = I$ et $B = -I$. Pour le point 4, il est vrai que si A et B sont inversibles, alors AB est inversible, mais l'inverse est donné par $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

b) La réponse correcte est la 2. Pour le point 1, la formule est $(AB)^T = B^T A^T$. Pour le point 3, il suffit que A soit symétrique. Pour le point 4, on a $(AB)^T = BA$.

c) Le point 1 est faux : prendre, par exemple, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Le point 2 est vrai. Pour voir que les points 3 et 4 sont faux, prendre les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

d) \mathbb{R}^8 .

- e) Le produit BA n'est pas bien défini si $m \neq p$. La matrice A^T est de taille $n \times m$. La matrice A représente une application $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Le point 4 est vrai.
- f) Pour voir que les points 1, 2 et 4 sont faux, prendre, par exemple,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le point 3 est vrai, car si on applique $C^{-1} = C$ à droite de chaque côté de l'équation $AC = BC$, on obtient $A = B$.

- g) Pour voir que le point 1 est faux, prendre $A = -I$. Le point 2 est vrai par distributivité :

$$(A - I)(A + I) = A \cdot A - I \cdot A + A \cdot I - I \cdot I = A^2 - A + A - I = A^2 - I.$$

Le point 3 est faux, car il manque le double produit $A \cdot I + I \cdot A = 2A$. Le point 4 n'est vrai que si $a^2 = a$. C'est donc faux en général. Par exemple si $A = I$ et $a = 2$ on a $(2I)^2 = 4I \neq 2I = 2I^2$.

Exercices additionnels

Exercice 13

Soit $a \in \mathbb{R}$. A l'aide de l'algorithme de réduction (ou de Gauss-Jordan), déterminer les valeurs du paramètre a pour lesquelles le système

$$\begin{cases} ax + (1 - a)y + (1 - a)z = a^2 \\ ax + (1 + a)y + (1 + a)z = a - a^2 \\ x + y + z = 1 - a \end{cases}$$

- a) n'admet aucune solution,
 b) admet une infinité de solutions,
 c) admet une solution unique.

Ensuite résoudre le système dans les cas b) et c).

Sol.: On écrit la matrice augmentée du système, en échangeant la première et la dernière ligne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 - a \\ a & 1 - a & 1 - a & a^2 \\ a & 1 + a & 1 + a & a - a^2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{L2} \rightarrow \text{L2} - a \cdot \text{L1} \\ \text{L3} \rightarrow \text{L3} - a \cdot \text{L1} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 - a \\ 0 & 1 - 2a & 1 - 2a & 2a^2 - a \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \widetilde{\text{L2} \leftrightarrow \text{L3}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 - a \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 - 2a & 1 - 2a & 2a^2 - a \end{array} \right) \text{L1} \rightarrow \text{L1} - \text{L2} \text{L3} \rightarrow \text{L3} - (1 - 2a)\text{L2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 - a \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2a^2 - a \end{array} \right)$$

La matrice est maintenant échelonnée et réduite. On distingue les cas :

- Si $a \neq 0$ et $a \neq 1/2$, le nombre $2a^2 - a$ est non nul. La dernière équation ne peut être vérifiée et le système ne possède pas de solutions. On écrit alors $S = \emptyset$ pour dire que l'ensemble des solutions est vide.

- Si $a = 0$ ou $a = 1/2$, la dernière équation donne $0 = 0$. Il reste alors deux équations à trois inconnues. On a ainsi une infinité de solutions paramétrées par $z \in \mathbb{R}$. On a toujours $x = 1 - a$ et $y = -z$. On choisit z comme inconnue libre, c'est-à-dire comme paramètre et on obtient :

$$S = \{(1 - a; -z; z) \mid z \in \mathbb{R}\}$$

Le système possède une droite entière de solutions.

Exercice 14

Déterminer toutes les matrices échelonnées-réduites de taille 3×3 .

Sol.: Il y a en tout huit matrices échelonnées-réduites de taille 3×3 :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & a \\ 0 & \mathbf{1} & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{1} & c & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & d & e \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & f \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où a, b, c, d, e, f sont des nombres réels quelconques.