

Série 4 (Corrigé)

Cette série suit le chapitre 1 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay.

Mots-clés : *base, transformation linéaire, indépendance linéaire*

Remarques :

1. il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours ;
2. il peut arriver que certaines questions soient reliées au cours du jeudi.

Exercice 1

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

- | | V | F |
|--|--------------------------|--------------------------|
| a) Le système d'équations linéaires homogène représenté par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ est compatible. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| b) Le système d'équations linéaires inhomogène représenté par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ est compatible. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| c) Si la matrice des coefficients d'un système de quatre équations à quatre inconnues a un pivot dans chaque colonne, alors le système est compatible. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| d) Si la matrice des coefficients d'un système de quatre équations à quatre inconnues a un pivot dans chaque ligne, alors le système est compatible. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| e) Si la matrice augmentée d'un système de quatre équations à quatre inconnues a un pivot dans chaque ligne, alors le système est compatible. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| f) Si la matrice augmentée d'un système de quatre équations à quatre inconnues a un pivot dans chaque colonne, alors le système est compatible. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Sol.:

- a) Un système d'équations linéaires homogène est toujours compatible! La matrice a beau avoir un pivot dans la dernière colonne, il ne s'agit pas ici d'un pivot dans la colonne des termes inhomogènes. Ceux-ci sont tous nuls et on ne les écrit pas.

- b) La ligne (0 0 0 7) montre que le système d'équations linéaires inhomogène est incompatible.
- c) C'est vrai. Un pivot dans chacune des quatre colonnes implique l'existence d'un pivot dans chaque ligne. On conclut alors par un résultat du cours.
- d) C'est vrai et c'est dit ainsi dans le cours.
- e) C'est faux. Il suffit que la dernière ligne soit de la forme (0 0 0 0 7) par exemple pour que le système soit incompatible.
- f) Si la matrice augmentée d'un système de quatre équations à quatre inconnues est constituée de cinq colonnes, celles des inconnues et celle des termes inhomogènes. Il n'est donc pas possible qu'il y ait un pivot dans chaque colonne.

Exercice 2

- a) Déterminer si les vecteurs $(1, 0, 0, 1)$, $(1, 1, 0, 2)$, $(0, 1, 1, 2)$ et $(0, 0, 1, 2)$ sont linéairement indépendants.
- b) Déterminer si les vecteurs $(1, 0, 0, 1)$, $(1, 1, 0, 2)$, $(0, 1, 1, 2)$ et $(0, 0, 1, 2)$ engendrent \mathbb{R}^4 .

Sol.:

- a) Cherchons les valeurs de α_1 , α_2 , α_3 et α_4 telles que

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

L'élimination de Gauss de la matrice augmentée associée nous donne

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{L_4 \rightarrow L_4 - L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Ainsi, la solution du système est unique

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$$

et les vecteurs $(1, 0, 0, 1)$, $(1, 1, 0, 2)$, $(0, 1, 1, 2)$ et $(0, 0, 1, 2)$ sont linéairement indépendants.

- b) Comme une forme échelonnée de la matrice de coefficients a des pivots dans chaque ligne, les vecteurs $(1, 0, 0, 1)$, $(1, 1, 0, 2)$, $(0, 1, 1, 2)$ et $(0, 0, 1, 2)$ engendrent \mathbb{R}^4 .

Exercice 3

Prouver l'affirmation suivante :

Soit l'ensemble $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$ de vecteurs de \mathbb{R}^n . Si $p < n$ alors l'ensemble ne peut pas être une base de \mathbb{R}^n .

Sol.: Pour être une base de \mathbb{R}^n il faut que pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{b} \in \text{span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$. C'est à dire que l'équation vectorielle $x_1 \vec{v}_1 + \dots + x_p \vec{v}_p = \vec{b}$ admette une solution. Mais pour avoir une solution pour chaque $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$, il faut que la matrice $A = (\vec{v}_1 \cdots \vec{v}_p)$ de taille $n \times p$ ait un pivot dans chaque ligne et donc qu'il n'y ait pas de ligne de zéros. Or comme $p < n$, la matrice a plus de lignes que

de colonnes, donc au mieux la matrice A possède p pivots. Ainsi la matrice aura des lignes de zéros :

$$A = \begin{pmatrix} * & & & \\ 0 & * & & \\ 0 & 0 & * & \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

et le système correspondant à $A\vec{v} = \vec{b}$ sera incompatible pour certains $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 4

Les vecteurs suivants sont-ils linéairement indépendants ? Engendrent-ils \mathbb{R}^3 (questions a) et b)) ou \mathbb{R}^2 (question c)) ?

$$\text{a) } \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b) } \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{c) } \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Sol.:

a) On cherche une combinaison linéaire des vecteurs telle que

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ce qui conduit au système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = 0 \\ 2x_1 & + x_3 = 0 \\ x_1 & = 0 \end{cases}.$$

Ce système possède une unique solution triviale $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, donc les vecteurs \vec{v}_1, \vec{v}_2 et \vec{v}_3 sont linéairement indépendants, et ils engendrent \mathbb{R}^3 .

b) \vec{v}_1, \vec{v}_2 et \vec{v}_3 ne sont pas linéairement indépendants. En effet, $\vec{v}_1 = -\vec{v}_2$. Ainsi ces trois vecteurs n'engendrent pas \mathbb{R}^3 .

c) \vec{v}_1, \vec{v}_2 et \vec{v}_3 ne sont pas linéairement indépendants, car ils sont de taille 2 strictement inférieure au nombre 3 de vecteurs. Cependant, ces vecteurs sont linéairement indépendants deux à deux, donc ils engendrent \mathbb{R}^2 .

Remarque

On utilise :

Les colonnes de A engendrent \mathbb{R}^m .

\Leftrightarrow Pour tout vecteur $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ a une solution $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ (tout vecteur $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ peut s'exprimer comme combinaison linéaire des colonnes de A).

\Leftrightarrow La matrice augmentée n'a pas de ligne de la forme $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & c \end{bmatrix}$ avec c non nul (car le système est compatible); la forme échelonnée de A n'a pas de ligne nulle $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ (car $A\vec{x} = \vec{b}$ a une solution pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$).

\Leftrightarrow Chaque ligne a une position pivot.

Exercice 5

Décrire quelle est la forme échelonnée réduite dans les cas suivants :

- A est une matrice 3×3 avec des colonnes linéairement indépendantes.
- A est une matrice 4×2 , $A = (\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2)$ et \vec{a}_2 n'est pas un multiple de \vec{a}_1 .
- A est une matrice 4×3 , $A = (\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \vec{a}_3)$. Les vecteurs \vec{a}_1 et \vec{a}_2 sont linéairement indépendants, et \vec{a}_3 n'est pas une combinaison linéaire de \vec{a}_1 et \vec{a}_2 .

Sol.:

a) Comme les colonnes de A sont linéairement indépendantes, le système homogène $A\vec{x} = \vec{0}$ n'admet que la solution triviale. Ainsi la forme échelonnée réduite s'écrit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Si \vec{a}_2 n'est pas un multiple de \vec{a}_1 , alors il n'existe pas $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{a}_2 = \lambda \vec{a}_1$. Deux cas sont possibles.

Si $\vec{a}_1 \neq \vec{0}$, alors les deux vecteurs \vec{a}_1, \vec{a}_2 sont linéairement indépendants, et la forme échelonnée réduite est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Si \vec{a}_1 est le vecteur nul, alors le vecteur \vec{a}_2 est non nul (car non multiple de $\vec{0}$), et la forme échelonnée réduite est : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c) \vec{a}_1 et \vec{a}_2 sont linéairement indépendants, donc ils engendrent un plan, c'est-à-dire un espace de dimension 2. Le vecteur \vec{a}_3 n'est pas dans cet espace, car ce n'est pas une combinaison linéaire de \vec{a}_1, \vec{a}_2 . Par conséquent, les trois vecteurs $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ engendrent un espace de dimension 3, ils sont linéairement indépendants.

D'où la forme échelonnée réduite de A : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 6

Soit A une matrice de taille $m \times n$. Montrer que les colonnes de A engendrent \mathbb{R}^m si et seulement si la forme échelonnée de la matrice A a une position pivot dans chaque ligne.

Sol.:

Les colonnes de A engendrent \mathbb{R}^m .

\Leftrightarrow Pour tout vecteur $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ a (au moins) une solution $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ (tout vecteur $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ peut s'exprimer comme combinaison linéaire des colonnes de A).

\Leftrightarrow La matrice échelonnée augmentée n'a pas de ligne de la forme $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & c \end{bmatrix}$ avec c non nul (car le système est compatible); et la forme échelonnée de A n'a pas de ligne nulle $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$.

\Leftrightarrow Chaque ligne a une position pivot.

Reformulation de la solution : soit

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(\vec{a}_1 \quad \cdots \quad \vec{a}_n \right)$$

où $\vec{a}_j \in \mathbb{R}^m, j = 1, \dots, n$ sont les vecteurs colonnes de A , i.e. $\vec{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$.

Dire que $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ engendre \mathbb{R}^m est équivalent à : tout vecteur de \mathbb{R}^m peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$, c-à-d :

$$\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^m, \exists x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \text{ tels que } \vec{b} = x_1 \vec{a}_1 + \dots + x_n \vec{a}_n. \quad (1)$$

En forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Ceci est équivalent à dire que pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ a au moins une solution $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Le système est donc compatible pour tout choix possible de \vec{b} , c-à-d la forme échelonnée de la matrice augmentée n'a pas de ligne de la forme $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & c \end{bmatrix}$ où $c \neq 0$. Puisque c dépend de \vec{b} et que \vec{b} est arbitraire, il est possible de trouver un vecteur $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ tel que $c \neq 0$. Donc la seule possibilité de ne pas avoir une telle ligne est qu'il y ait une position pivot dans chaque ligne de A . Vice-versa, s'il y a une position pivot dans chaque ligne de A , ce n'est pas possible d'avoir une ligne du type $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & c \end{bmatrix}$ avec $c \neq 0$.

Considérons par exemple la matrice 2×3 suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

La forme échelonnée de la matrice augmentée est

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 & b_1 \\ 2 & 4 & -2 & b_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{3L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 3b_2 - 2b_1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

La dernière ligne est de la forme $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & c \end{bmatrix}$, où $c = 3b_2 - 2b_1$. Donc si $b_2 \neq \frac{2}{3}b_1$ le système est incompatible. En effet, les trois vecteurs colonnes de la matrice A sont colinéaires et n'engendrent pas \mathbb{R}^2 .

Par contre en prenant la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

et en procédant de la même manière, on obtient

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 & b_1 \\ 2 & 4 & 2 & b_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{3L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix} \boxed{3} & 6 & -3 & b_1 \\ 0 & 0 & \boxed{12} & 3b_2 - 2b_1 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Il y a bien une position pivot dans chaque ligne, le système est compatible et les colonnes de A engendrent \mathbb{R}^2 .

Exercice 7

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

- a) Deux vecteurs sont linéairement dépendants si et seulement s'ils se trouvent sur une même droite qui passe par l'origine.
- b) Si un ensemble comporte moins de vecteurs que le nombre de composantes de ceux-ci, alors il est linéairement indépendant.
- c) Une équation homogène est toujours compatible.
- d) Si \vec{x} est une solution non triviale de $A\vec{x} = \vec{0}$, alors aucune composante de \vec{x} est nulle.

Sol.:

- a) Vrai. Deux vecteurs \vec{v} et \vec{w} sont linéairement dépendants s'il existe des nombres $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ tels que $\lambda\vec{v} + \mu\vec{w} = \vec{0} \iff \lambda\vec{v} = -\mu\vec{w}$. Si $\lambda \neq 0$ on peut donc écrire $\vec{v} = -\frac{\mu}{\lambda}\vec{w}$ et donc \vec{v} est multiple de \vec{w} . Si $\lambda = 0$ alors forcément $\mu \neq 0$ et par le même argument on a que \vec{w} est multiple de \vec{v} . Ceci signifie exactement que les vecteurs \vec{v} et \vec{w} se trouvent sur une même droite qui passe par l'origine.
- b) Faux. Prenons par exemple les 2 vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ayant 3 composantes. Ils sont pourtant linéairement dépendants.
- c) Vrai. Une équation homogène $A\vec{x} = \vec{0}$ possède toujours au moins la solution nulle et est donc toujours compatible.
- d) Faux. Prenons par exemple la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors \vec{x} est une solution non triviale de $A\vec{x} = \vec{0}$, mais \vec{x} a une composante nulle.

Exercice 8

Soit

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ h \end{pmatrix}$$

- L'ensemble $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ est linéairement indépendant pour $h = -2$.
- Le vecteur \mathbf{v}_2 dépend linéairement des vecteurs \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_3 pour $h \neq 2$.
- L'ensemble $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ est linéairement indépendant pour $h \neq -2$.
- Le vecteur \mathbf{v}_3 dépend linéairement des vecteurs \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 pour $h = 2$.

Sol.: La seule bonne réponse est la deuxième. On a

$$\left[\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3 \right] \underset{L_3+2L_1}{\overset{L_2-3L_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & h+2 \end{bmatrix}$$

La deuxième ligne montre que quelque soit la valeur de h , le système $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3$ est inconsistant et donc \mathbf{v}_3 ne peut pas se trouver dans $\text{Vect}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. En fait, on voit que \mathbf{v}_2 est un multiple de \mathbf{v}_1 . La famille $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ est donc linéairement dépendante. *A fortiori* la famille $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ est aussi linéairement dépendante! Cette observation élimine les réponses 1 et 3.

Quelle que soit la valeur de h , les vecteurs \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 et \mathbf{v}_3 sont linéairement dépendants car il n'y a pas un pivot dans chacune des colonnes de la matrice augmentée.

Exercice 9

- a. Combien de colonnes pivots une matrice 7×5 doit-elle posséder pour que ses colonnes soient linéairement indépendantes?
 - Moins de 5, 5 exactement, 7 exactement, entre 5 et 7.
- b. Combien de colonnes pivots une matrice 5×7 doit-elle posséder pour que ses colonnes engendrent \mathbb{R}^5 ?
 - Moins de 5, 5 exactement, 7 exactement, entre 5 et 7.
- c. L'application linéaire du plan \mathbb{R}^2 dont la matrice est $\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ est
 - une rotation une translation une projection orthogonale une homothétie

Sol.:

- a. Combien de colonnes pivots une matrice 7×5 doit-elle posséder pour que ses colonnes soient linéairement indépendantes?

Elle doit posséder cinq colonnes pivots, parce que s'il n'y a pas cinq pivots alors il existe des inconnues libres et donc les colonnes sont dépendantes.

b. Combien de colonnes pivots une matrice 5×7 doit-elle posséder pour que ses colonnes engendrent \mathbb{R}^5 ?

Si les colonnes d'une matrice 5×7 engendrent \mathbb{R}^5 alors cette matrice doit posséder un pivot dans chaque ligne. Puisque chaque position pivot est dans une colonne cette matrice doit donc posséder cinq colonnes pivots.

c. C'est une projection orthogonale sur la diagonale $x = y$. On voit dans les colonnes de cette matrice que les images des deux vecteurs \vec{e}_1 et \vec{e}_2 sont égales et se trouvent sur cette diagonale. Une contemplation un peu plus approfondie de ces images montre qu'il s'agit bien des projections orthogonales.

Exercice 10

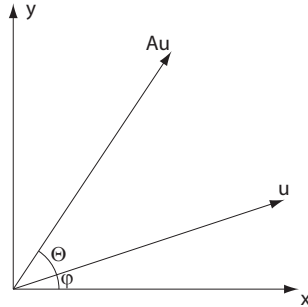
Décrire géométriquement la transformation linéaire suivante : $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par

$$T(\vec{u}) = A\vec{u} \quad \text{où } A = \begin{pmatrix} \cos \Theta & -\sin \Theta \\ \sin \Theta & \cos \Theta \end{pmatrix}.$$

Indication : Calculer les images de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ par T .

Sol.:

Les images de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont $\begin{pmatrix} \cos \Theta \\ \sin \Theta \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -\sin \Theta \\ \cos \Theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2} + \Theta) \\ \sin(\frac{\pi}{2} + \Theta) \end{pmatrix}$, respectivement. La transformation linéaire correspond à une rotation anti-horaire d'angle Θ .



On peut aussi décrire la transformation de la façon suivante. Un vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ s'écrit en coordonnées polaires $\vec{u} = r \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$, et par les formules d'addition d'angles on calcule

$$A\vec{u} = r \begin{pmatrix} \cos \Theta \cos \varphi - \sin \Theta \sin \varphi \\ \sin \Theta \cos \varphi + \cos \Theta \sin \varphi \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos(\Theta + \varphi) \\ \sin(\Theta + \varphi) \end{pmatrix}.$$

On voit que la longueur r n'est pas modifiée par la transformation T , mais l'angle φ est remplacé par $\Theta + \varphi$, donc T est bien une rotation d'angle Θ . **Exercices additionnels**

Exercice 11

Déterminer toutes les valeurs possibles des nombres a, b, c, d et e pour lesquelles la matrice suivante est sous forme échelonnée-réduite :

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & c & 1 & d & 3 \\ 0 & e & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sol.: La matrice suivante (sans lui effectuer des opérations élémentaires) est sous la forme échelonnée réduite si

$$e = 0, \quad c = 1, \quad b = 0 \quad d = 0$$

Exercice 12

Déterminer les valeurs des paramètres réels a , b et c pour lesquelles le système d'équations

$$\begin{cases} x - 2y + 3z + u = a \\ x + 3y - 2z + u = b \\ x - 7y + 8z + u = c \end{cases}$$

possède des solutions. Déterminer ces solutions.

Indication : résoudre le système $A\vec{v} = \vec{b}$ avec $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Sol.: La matrice échelonnée-réduite du système est

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{5}(3a + 2b) \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{5}(b - a) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c + b - 2a \end{array} \right).$$

La condition d'existence des solutions est ainsi

$$c + b - 2a = 0.$$

Si cette condition est satisfaite, la solution générale existe et dépend de deux paramètres :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}(3a + 2b) \\ \frac{1}{5}(b - a) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{pour tout } s, t \in \mathbb{R}.$$